



第3章 海洋中的声传播理论

主要内容

- 波动方程和定解条件
- 波动声学基础
- 射线声学基础 ✓
- 分层介质中的射线声学
- 波动声学 & 射线声学的比较

主要内容

- **射线声学基础** ✓
 - 射线声学基本假定
 - 波阵面和声线
 - 射线声学基本方程
程函方程、强度方程
 - 射线声学的适用条件

3.3 射线声学基础

射线声学：将声波传播视为一束无数条垂直等相位面的射线传播。

声线：与等相位面垂直的射线。

- ①声线途经的距离代表声波传播的距离；
- ②声线经历的时间代表声波传播的时间；
- ③声线束携带的能量代表声波传播的声能量；
- ④射线声学为波动方程的近似解。

3.3 射线声学基础

1、射线声学基本假定

- (1) 声线方向是声传播方向，且垂直于波阵面；
- (2) 声线携带能量，声场某点上的能量是所有到达该点声线所携带的能量叠加；
- (3) 声线管束中能量守恒，与管外无能量交换。

3.3 射线声学基础

2、波阵面和声线

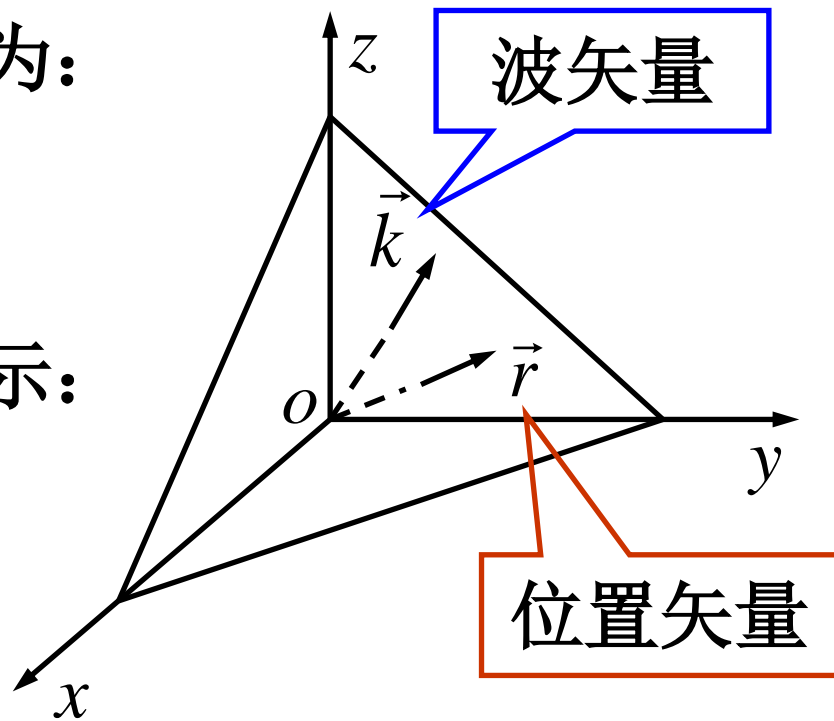
沿任意方向传播的平面波可写为：

$$\phi = Ae^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

矢量 \vec{k} 方向可用其方向余弦表示：

$$\frac{k_x}{k} = \cos \alpha \quad \frac{k_y}{k} = \cos \beta$$

$$\frac{k_z}{k} = \cos \gamma$$



3.3 射线声学基础

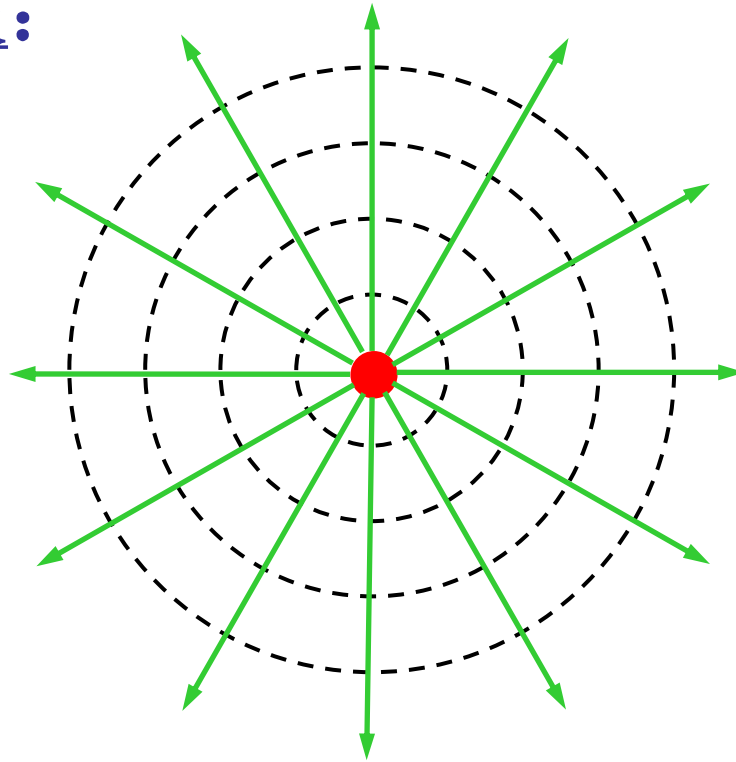
均匀介质平面波:



特点: 声线相互平行, 互不相交, 声波振幅处处相等。

3.3 射线声学基础

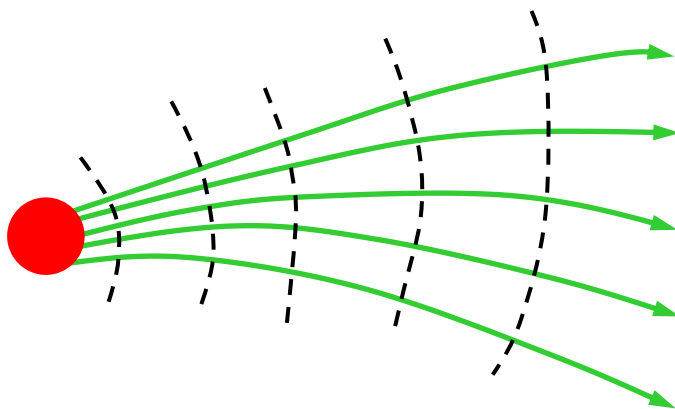
均匀介质球面波:



特点：声线为由点源沿外径方向放射声线束，互不相交，等相位面为同心球面，声波振幅随距离衰减。

3.3 射线声学基础

非均匀介质球面波:



特点：声线方向因位置变化而变化，声线束由点源向外放射的曲线束组成，等相位面不再是同心球面。

3.3 射线声学基础

3、射线声学基本方程

波动方程:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad c = c(x, y, z)$$

形式解可写成为:

$$p(x, y, z, t) = A(x, y, z) \exp[j(\omega t - k(x, y, z)\phi_1(x, y, z))]$$

声压振幅

波数


3.3 射线声学基础

3、射线声学的基本方程

$$k = \frac{\omega}{c(x, y, z)} = \frac{\omega}{c_0} \frac{c_0}{c(x, y, z)} = k_0 n(x, y, z)$$

参考声速

折射率


$$\varphi(x, y, z) = n(x, y, z) \varphi_1(x, y, z)$$

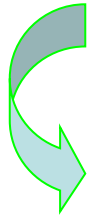
$$p(x, y, z, t) = A(x, y, z) \exp[j(\omega t - k_0 \varphi(x, y, z))]$$

3.3 射线声学基础

程函概念:

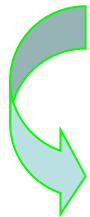
$$\varphi(x, y, z) = n(x, y, z)\varphi_1(x, y, z)$$

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}$$



所确定的曲面为等相位面，相位值处处相等。

$$\nabla\varphi(x, y, z)$$



代表声线的方向，处处与等相位面垂直。

3.3 射线声学基础

形式解 $p(x, y, z, t) = A(x, y, z) \exp[j(\omega t - k_0 \varphi(x, y, z))]$

将形式解代入波动方程：

$$\frac{\nabla^2 A}{A} - k_0^2 \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + k^2 - jk_0 \left(\frac{2\nabla A}{A} \cdot \nabla \varphi + \nabla^2 \varphi \right) = 0$$

给定假设

$$\nabla^2 A / A \ll k^2$$

实部为0

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\nabla^2 A}{A} - k_0^2 \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + k^2 = 0 \end{array} \right.$$

虚部为0

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi + \frac{2}{A} \nabla A \cdot \nabla \varphi = 0 \end{array} \right.$$



$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 A / A \ll k^2 \\ \text{实部为0} \end{array} \right\} (\nabla \varphi)^2 = \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 = n^2(x, y, z)$$

$$\nabla \cdot (A^2 \nabla \varphi) = 0$$

3.3 射线声学基础

程函方程:

$$(\nabla \varphi)^2 = \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 = n^2(x, y, z)$$

声线方向
声线轨迹
声线传播时间

强度方程:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{2}{A} \nabla A \cdot \nabla \varphi = \nabla \cdot (A^2 \nabla \varphi) = 0$$

声线幅度或
携带的能量

3.3 射线声学基础

(1) 程函方程

假设声线方向为 \vec{s} ，其单位矢量 $\vec{s}_0 = \vec{k}/|\vec{k}|$ ，其方向就是 $\nabla\varphi$ 方向，则：

$$\frac{d\varphi(x, y, z)}{ds} = \nabla\varphi \cdot \vec{s}_0 = |\nabla\varphi|$$

$$\nabla\varphi = |\nabla\varphi|(\cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k})$$

(1) 程函方程

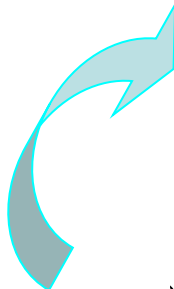
由程函方程可得： $|\nabla\varphi| = n$

矢量形式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = n(\cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k})$$

标量形式

$$n = \sqrt{|\nabla\varphi|^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}$$


$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = n\cos\alpha \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = n\cos\beta \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = n\cos\gamma \end{cases}$$

确定声线方向

(1) 程函方程

声线的方向余弦:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}$$

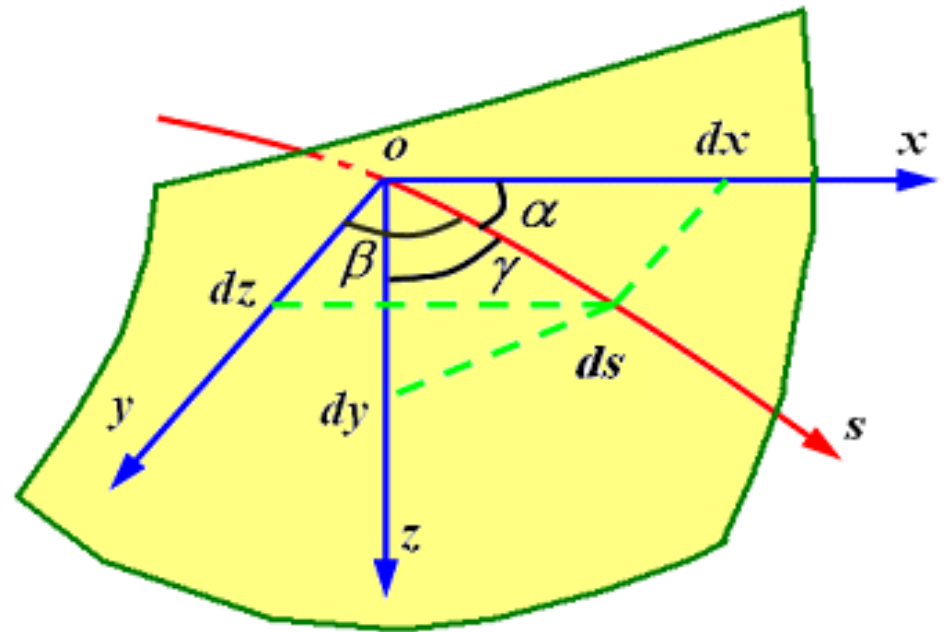
确定声线方向

3.3 射线声学基础

(1) 程函方程

声线的方向余弦:

$$\begin{cases} \cos \alpha = dx/ds \\ \cos \beta = dy/ds \\ \cos \gamma = dz/ds \end{cases}$$



(1) 程函方程

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(n \cos^2 \alpha + n \cos^2 \beta + n \cos^2 \gamma \right) = \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{ds} (n \cos \alpha) = \frac{\partial n}{\partial x} \\ \frac{d}{ds} (n \cos \beta) = \frac{\partial n}{\partial y} \\ \frac{d}{ds} (n \cos \gamma) = \frac{\partial n}{\partial z} \end{array} \right.$$

$$\frac{d}{ds} (\nabla \varphi) = \nabla n$$

应用举例

♀ 声速为常数
 $c=c_0$ 则 $n=1$

声线的起始
出射方向角

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds}(n \cos \alpha) &= \frac{\partial n}{\partial x} \\ \frac{d}{ds}(n \cos \beta) &= \frac{\partial n}{\partial y} \\ \frac{d}{ds}(n \cos \gamma) &= \frac{\partial n}{\partial z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \alpha_0 \\ \cos \beta &= \cos \beta_0 \\ \cos \gamma &= \cos \gamma_0 \end{aligned} \right.$$



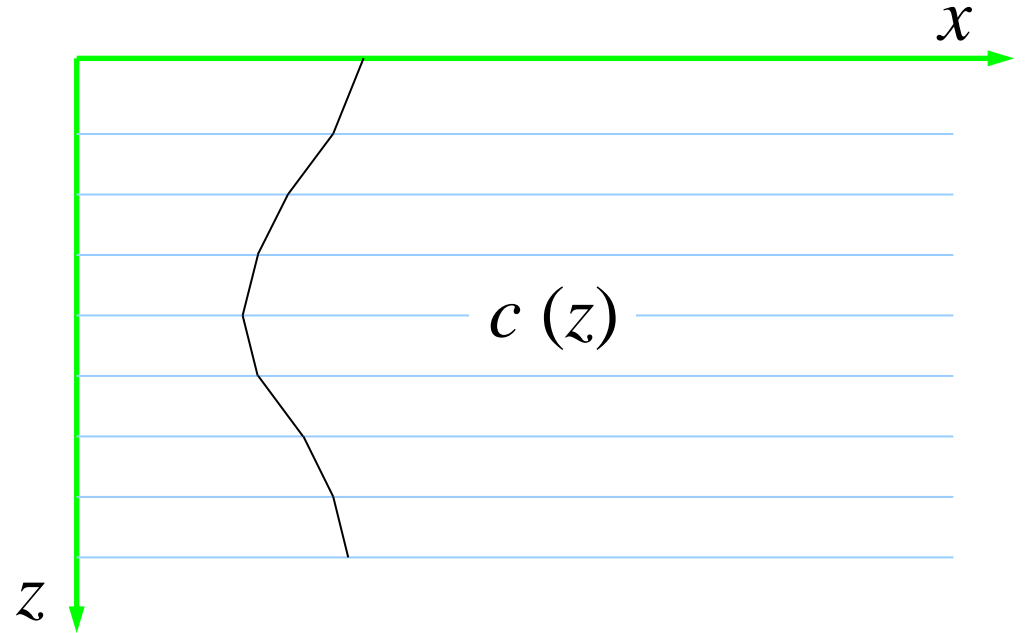
声速为常数时，声线为直线。

3.3 射线声学基础

应用举例

♀ 声速 $c = c(z)$

$$n(x, y, z) = n(z)$$



$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left(\frac{c_0}{c} \cos \alpha \right) = 0 \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{c_0}{c} \cos \gamma \right) = \frac{\partial n}{\partial z} = -\frac{c_0}{c^2} \frac{dc}{dz} \end{cases}$$

♀ 声速 $c = c(z)$

对 (3-80) 的1式处理, 2式同理略去。

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{c_0}{c} \cos \alpha \right) = 0 \longrightarrow \frac{\cos \alpha}{c(z)} = \text{const}$$

$$\frac{\cos \alpha}{c(z)} = \frac{\cos \alpha_0}{c_0}$$

声线起始值

折射定律或Snell定律
——射线声学的基本定律

♀ 声速 $c = c(z)$

对 (3-80) 的3式处理

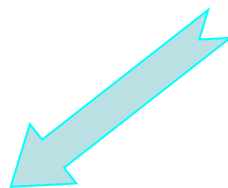
$$\frac{d}{ds} \left(\frac{c_0}{c} \cos \gamma \right) = -\frac{c_0}{c^2} \frac{dc}{dz}$$



$$\frac{d}{ds} \left(\frac{c_0}{c} \cos \gamma \right) = -n \sin \gamma \frac{d\gamma}{ds} + \cos^2 \gamma \frac{dn}{dz}$$



$$-\frac{c_0}{c^2} \frac{dc}{dz} = -\frac{n}{c} \frac{dc}{dz} = \frac{dn}{dz}$$

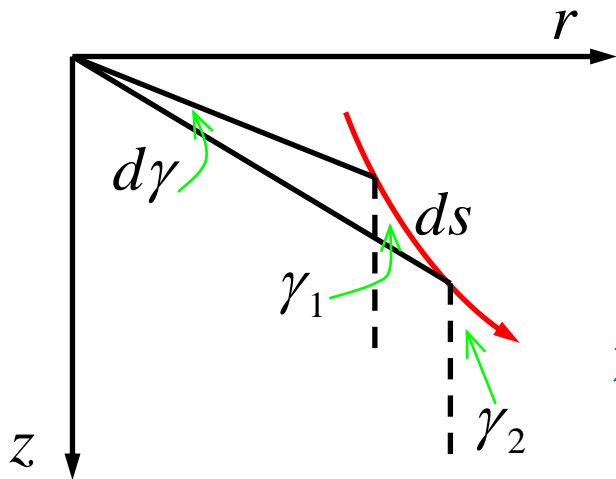


$$\frac{d\gamma}{ds} = -\frac{\sin \gamma}{n} \frac{dn}{dz} = \frac{\sin \gamma}{c} \frac{dc}{dz}$$

♀ 声线弯曲

正声速梯度: $dc/dz > 0$

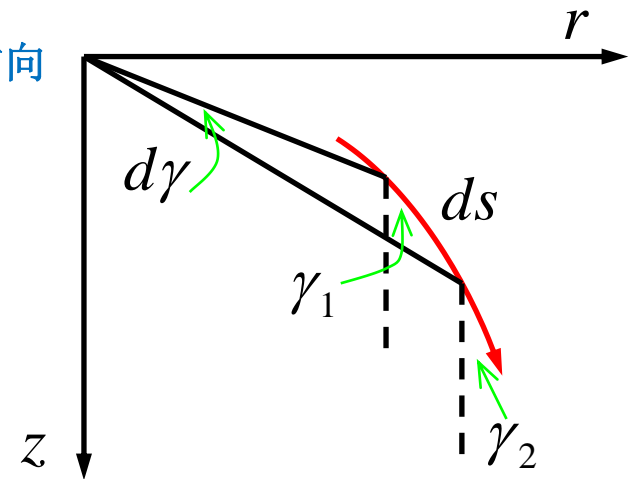
负声速梯度: $dc/dz < 0$



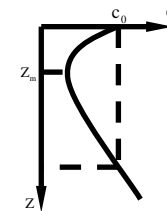
声速z方向的
梯度

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\sin \gamma}{c} \frac{dc}{dz}$$

声线曲率



声线总是弯向声速小的方向。



♀ 程函显示求解

讨论 xoz 平面问题:

$$c = c(z) \quad n = n(z) \quad \varphi(x, z) = \varphi_1(x) + \varphi_2(z)$$

Snell定律

$$n \cos \gamma = \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha_0}$$

$$\varphi_1(x) = \cos \alpha_0 \cdot x + C_1$$

$$\varphi_2(z) = \int_{z_0}^z \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha_0} dz + C_2$$

$$\varphi(x, z) = \cos \alpha_0 \cdot x + \int_{z_0}^z \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha_0} dz + C$$

3.3 射线声学基础

(2) 强度方程

声强:

垂直于声波传播方向上单位面积的平均声能。

对于简谐波, 声强等于一个周期 T 内瞬时声能流的平均。

♀ 强度方程意义

声强定义:
$$I = \frac{1}{T} \int_0^T p u dt$$

$$\vec{I} = \frac{j}{\rho\omega} \frac{1}{T} \int_0^T p^* \nabla p dt$$

为简单计, 只考虑 x 方向:

$$I_x \propto p^* \frac{\partial p}{\partial x} = A^2 \left[\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} - jk_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]$$

3.3 射线声学基础

♀ 强度方程意义

在高频或声压振幅随距离相对变化甚小:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \ll k_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} &\implies I_x \propto A^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ I_y &\propto A^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ I_z &\propto A^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \implies \vec{I} \propto A^2 \nabla \varphi$$

3.3 射线声学基础

♀ 强度方程意义

强度方程:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{2}{A} \nabla A \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot (A^2 \nabla \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{I} = 0$$

声强矢量散度等于零，声强场为管量场。

根据奥高定理:

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{I} dV = \oiint_S \vec{I} \cdot d\vec{S}$$

3.3 射线声学基础

♀ 强度方程意义

① 声能沿声线管束传播，端面大，声能分散，声强值减小；端面小，声能集中，声强值增加，因而声强 I 与面积 S 成反比。

② 管束内的声能不会通过侧面向外扩散。

♀ 声强的基本公式

设声源单位立体角的辐射声功率为 W ，则声强为：

$$I = \frac{W d\Omega}{dS}$$

$d\Omega$ 所张截面积微元 dS

如果声源为轴对称，考虑掠射角 α_0 到 $\alpha_0 + d\alpha_0$ 立体角内的声线管束：

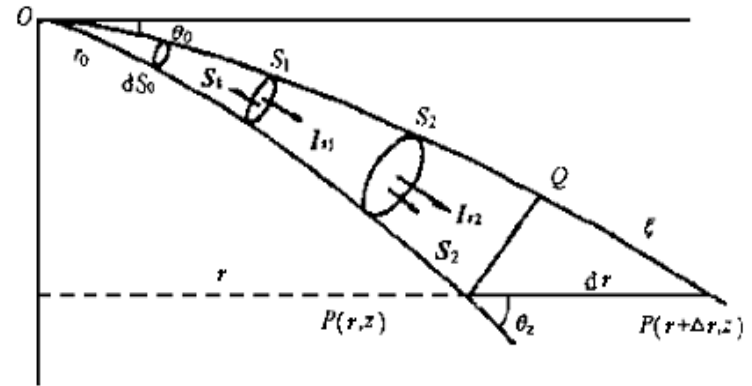
$$d\Omega = \frac{dS_0}{r_0^2} = 2\pi \cos \alpha_0 d\alpha_0$$

单位距离 r_0 处

♀ 声强的基本公式

当声线到达观察点 P 处，则有：

$$dS = 2\pi r \overline{PQ} = 2\pi r \sin \alpha_z dr$$



若已知起始掠射角 α_0 的声线轨迹方程：

$$r = r(\alpha_0, z)$$

掠射角 α_0 到 $\alpha_0 + d\alpha_0$ 时水平距离增量：

$$dr = \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} d\alpha_0 \longrightarrow dS = 2\pi r \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} \sin \alpha_z d\alpha_0$$

♀ 声强的基本公式

$$I = \frac{W d\Omega}{dS}$$
$$d\Omega = \frac{dS_0}{r_0^2} = 2\pi \cos \alpha_0 d\alpha_0$$
$$dS = 2\pi r \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} \sin \alpha_z d\alpha_0$$

$$I(r, z) = \frac{W \cos \alpha_0}{r \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} \sin \alpha_z}$$

$$I(r, z) = \frac{W \cos \alpha_0}{r \left| \frac{\partial r}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \sin \alpha_z}$$

3.3 射线声学基础

♀ 声强的基本公式

如果不计入常数因子，声压振幅：

$$A(r, z) = |I|^{1/2} = \sqrt{\frac{W \cos \alpha_0}{r \left| \frac{\partial r}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \sin \alpha_z}}$$

平面问题的射线声场表示式：

$$P(r, z) = A(r, z) \exp[-jk_0 \varphi(r, z)]$$

3.3 射线声学基础

4、射线声学的适用条件

程函方程导出条件:

$$\frac{\nabla^2 A}{A} \ll k^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{\lambda^2}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) \ll 1$$

强度方程条件:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{2}{A} \nabla A \cdot \nabla \varphi = 0$$

具有相同数量级

3.3 射线声学基础

射线声学近似条件和局限性

(1) 在声波波长的距离上，声波振幅变化的相对变化量远小于1。

——声场声强没有发生太大变化。如在波束边缘、声影区（声线不能到达的区域）和焦散区（声能会聚区域），射线声学不成立。

(2) 在声波波长的距离上，声速相对变化远小于1。

——声速变化缓慢的介质。如在声速跃变层，射线声学不成立。

3.3 射线声学基础

射线声学近似条件和局限性

射线声学是波动声学的高频近似，适用于高频条件和弱不均匀介质（缓慢变化）情况。

《水声建模与仿真》专著给出高频条件：

$$f > 10 \frac{c}{H}$$

3.4 分层介质中的射线声学

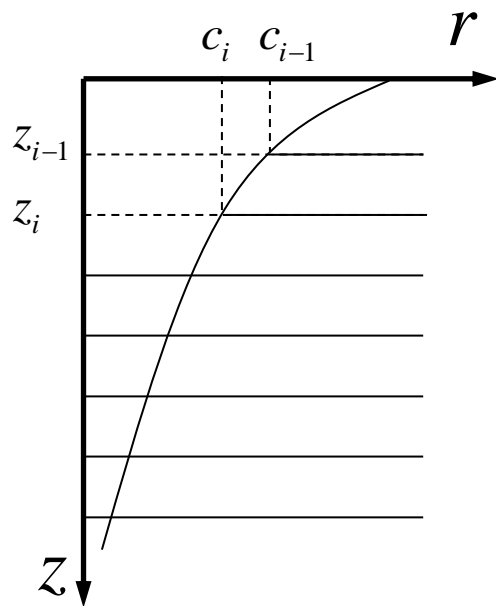
海水介质具有垂直分层特性，声速不随水平方向变化，仅是海水深度的函数。

在分层介质模型中：

层厚度： $h_i = z_i - z_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, N$

层中相对声速梯度： $a_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{c_{i-1}(z_i - z_{i-1})}$

层中声速： $c(z) = c_{i-1} \left[1 + a_i (z_i - z_{i-1}) \right] \quad z_{i-1} \leq z \leq z_i$

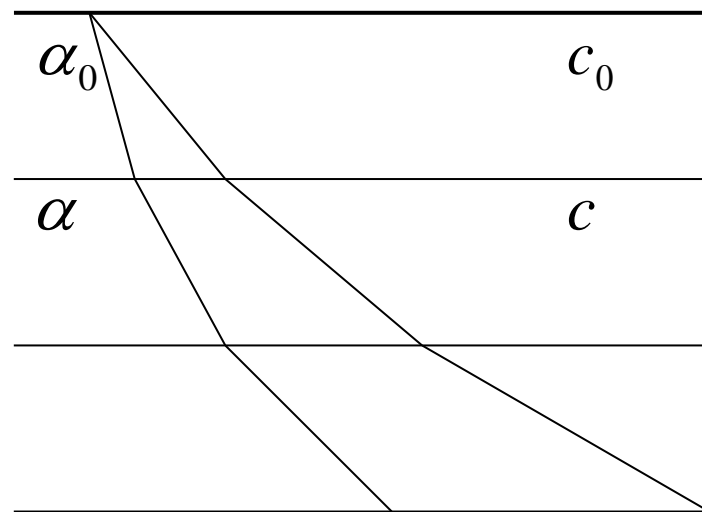


分层介质模型是实际海洋介质近似理想模型。

1、Snell定律和声线弯曲

射线声学遵循的Snell定律:

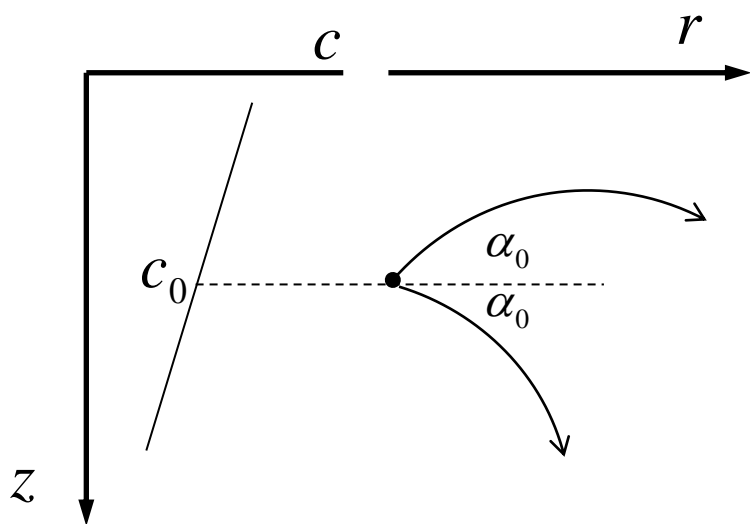
$$\frac{\cos \alpha}{c} = \frac{\cos \alpha_0}{c_0} = \text{const}$$



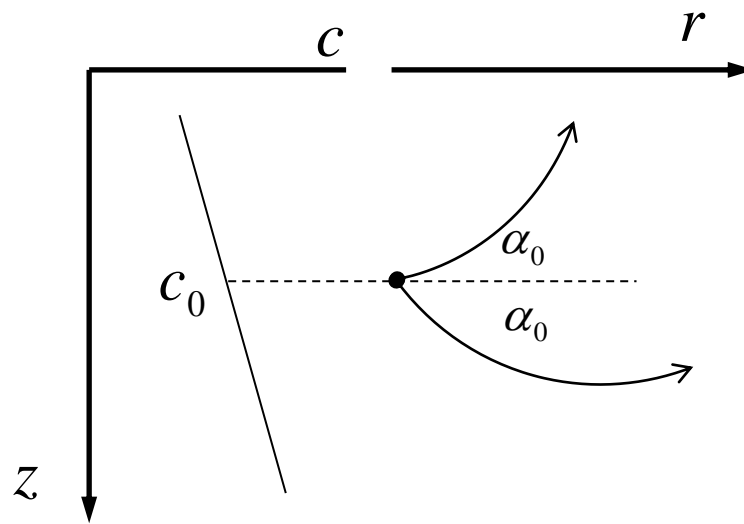
- ① 已知声线出射处掠射角和声速垂直分层分布，可按Snell定律求出任意深度处声线掠射角。
- ② 不同起始掠射角，对应不同的声线轨迹。

1、Snell定律和声线弯曲

声线弯曲:



(a) 负梯度下声线弯曲



(b) 正梯度下声线弯曲



声线总是弯向声速小的方向。

2、声线轨迹

平面内声线曲率表达式:

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\sin \gamma}{c} \cdot \frac{dc}{dz} = \frac{\cos \alpha}{c} \cdot \frac{dc}{dz} = \frac{\cos \alpha_0}{c_0} \cdot \frac{dc}{dz}$$

恒定声速梯度: $c = c_0(1 + az)$

$$\frac{dc}{dz} = c_0 a = \text{const}$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = a \cos \alpha_0 = \text{const}$$



恒定声速梯度情况下，声线曲率处处相等，轨迹是圆弧。

(1) 声线轨迹方程

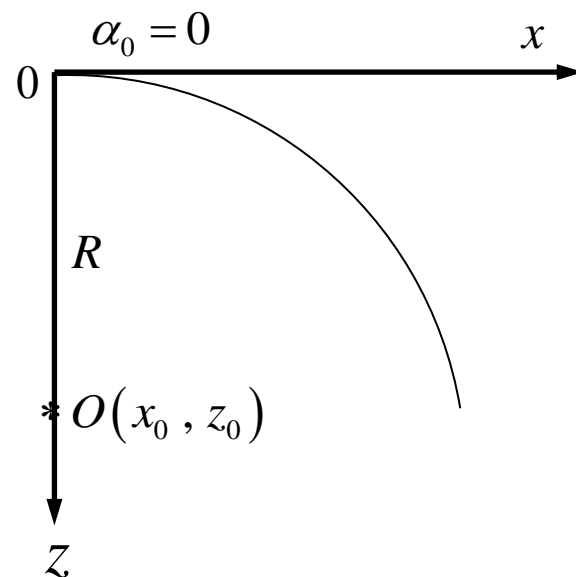
恒定声速梯度: $c = c_0(1 + az)$

声线曲率半径为:

$$R = 1 / \left| \frac{d\gamma}{ds} \right| = 1 / \left| \frac{\cos \alpha}{c} \frac{dc}{dz} \right|$$

该声线轨迹方程:

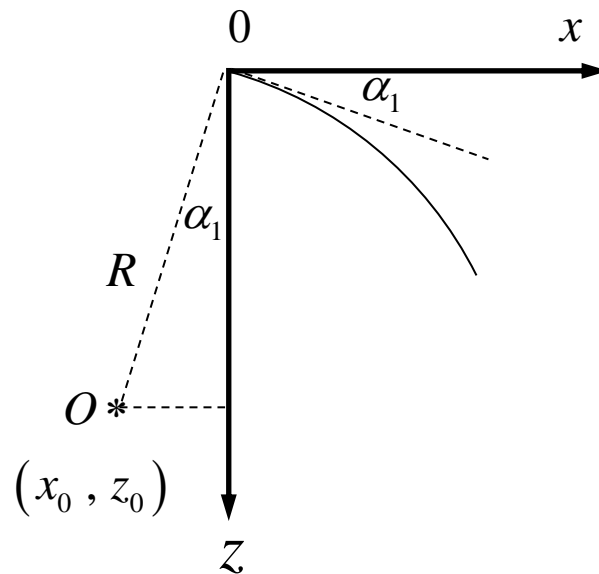
$$x^2 + \left(z + \frac{1}{a} \right)^2 = \frac{1}{a^2}$$



(1) 声线轨迹方程

声源在海面以任意掠射角出射的声线轨迹方程：

$$\left(x - \frac{\tan \alpha_1}{a}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{a}\right)^2 = \left(\frac{1}{a \cos \alpha_1}\right)^2$$



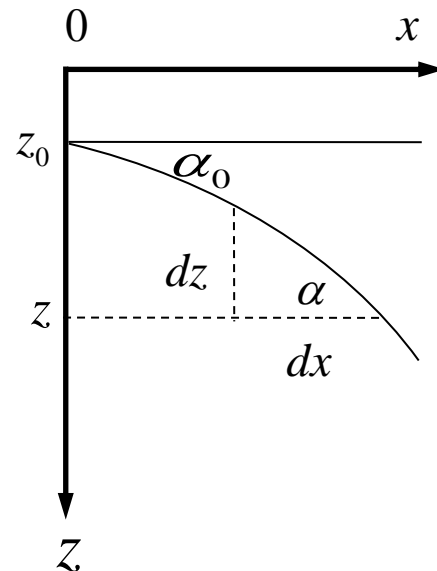
若声源位于海面以下，请求声线轨迹方程？

(1) 声线轨迹方程

海水介质中声速为： $c = c(z)$

根据声线微元可得：

$$dx = \frac{dz}{\tan \alpha}$$



由Snell定律可得声线轨迹方程的微分形式：

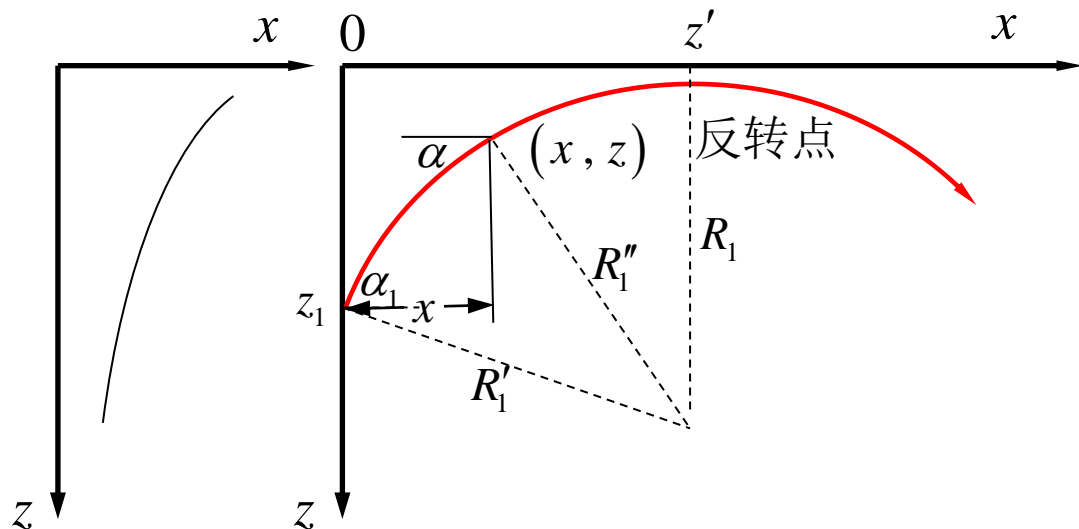
$$dx = \frac{\cos \alpha_0}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha_0}} dz$$

(2) 声线传播水平距离

声速分布: $c = c(z)$

声源位于: $(0, z_1)$

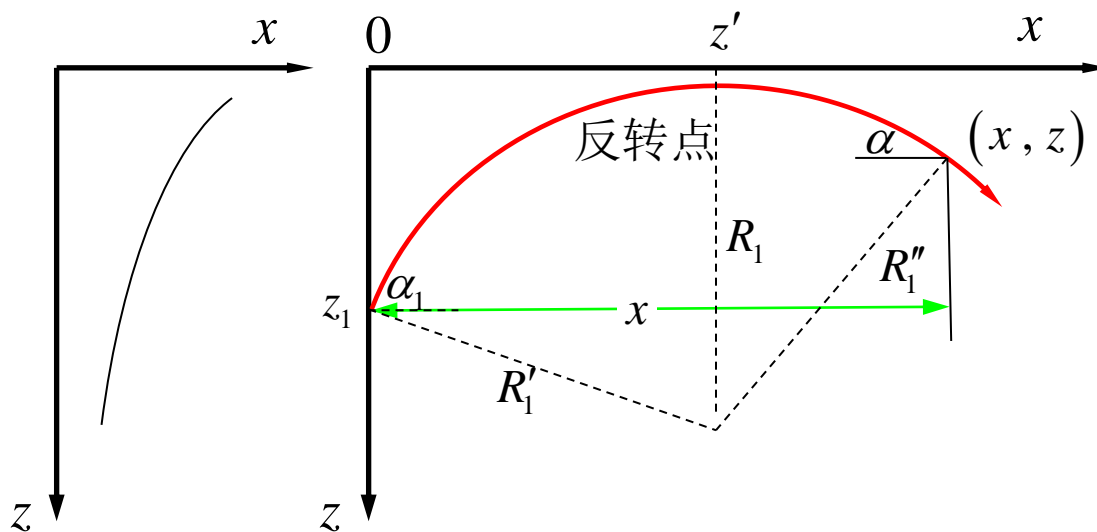
接收点位于: (x, z)



声线经过水平距离:

$$x = \int dx = \left| \int_{z_1}^z \frac{dz}{\tan \alpha(z)} \right| = \cos \alpha_1 \left| \int_{z_1}^z \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - \cos^2 \alpha_1}} \right|$$

(2) 声线传播水平距离

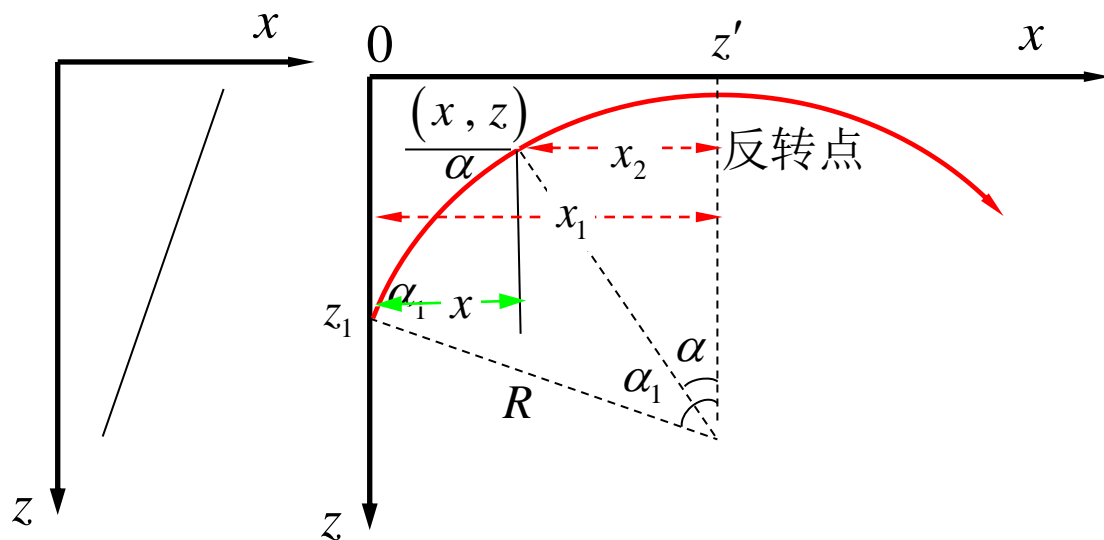


$$x = \cos \alpha_1 \left| \int_{z_1}^{z'} \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - \cos^2 \alpha_1}} \right| + \left| \int_{z'}^z \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - 1}} \right|$$



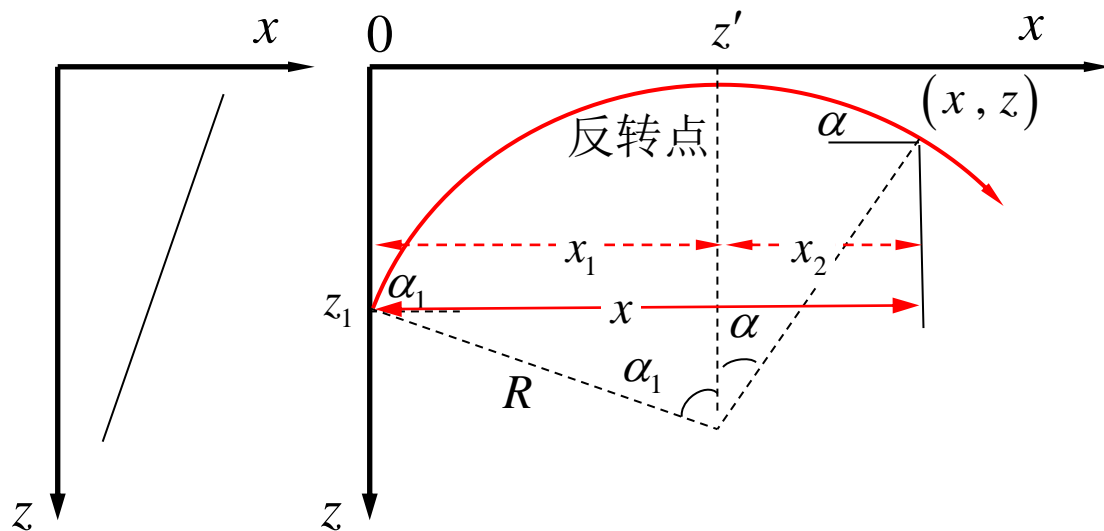
反转点处的掠射角 $\alpha' = 0$ 。

(2) 声线传播水平距离



$$x = R \left| \sin \alpha_1 - \sin \alpha(z) \right| = \left| \frac{c(z_1)}{\cos \alpha_1 \cdot g} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha(z)) \right|$$

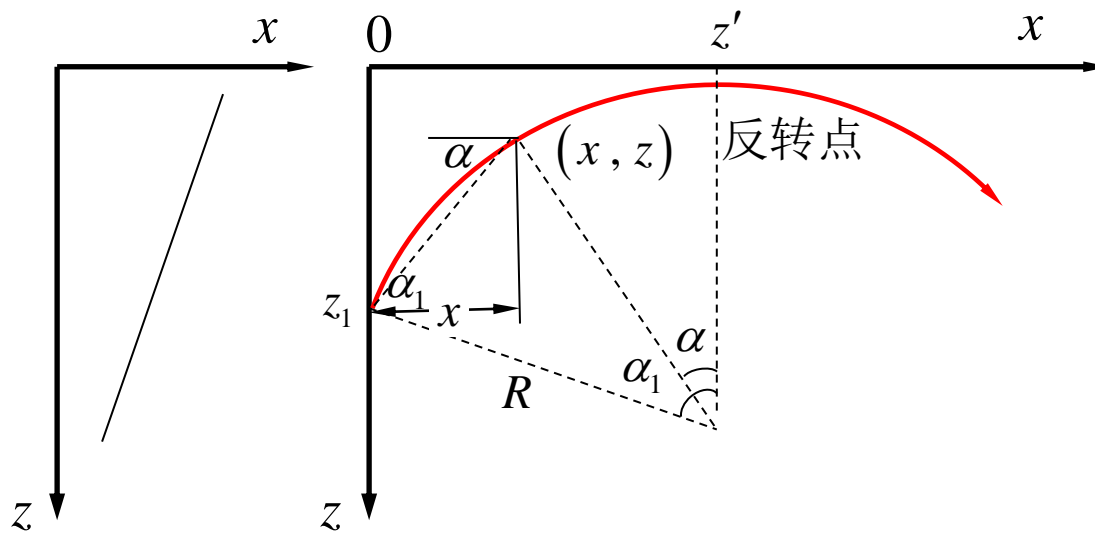
(2) 声线传播水平距离



$$x = \left| \frac{c(z_1)}{\cos \alpha_1 \cdot g} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha(z)) \right|$$

(2) 声线传播水平距离

若已知声线经过的垂直距离，则水平距离：



$$x = \frac{z_1 - z}{\tan \left[\frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha(z)) \right]} \quad x = \frac{z_1 - z}{\tan \left[\frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha(z)) \right]}$$

(3) 声线传播时间

声线从 z_1 深度传播到 z 深度所需时间:

$$t = \int \frac{ds}{c} = \left| \int_{z_1}^z \frac{dz}{c(z) \sin \alpha(z)} \right|$$

根据Snell定律，声线传播时间表达式:

$$t = \frac{1}{c(z_1)} \left| \int_{z_1}^z \frac{n^2(z) dz}{\sqrt{n^2(z) - \cos^2 \alpha_1}} \right|$$

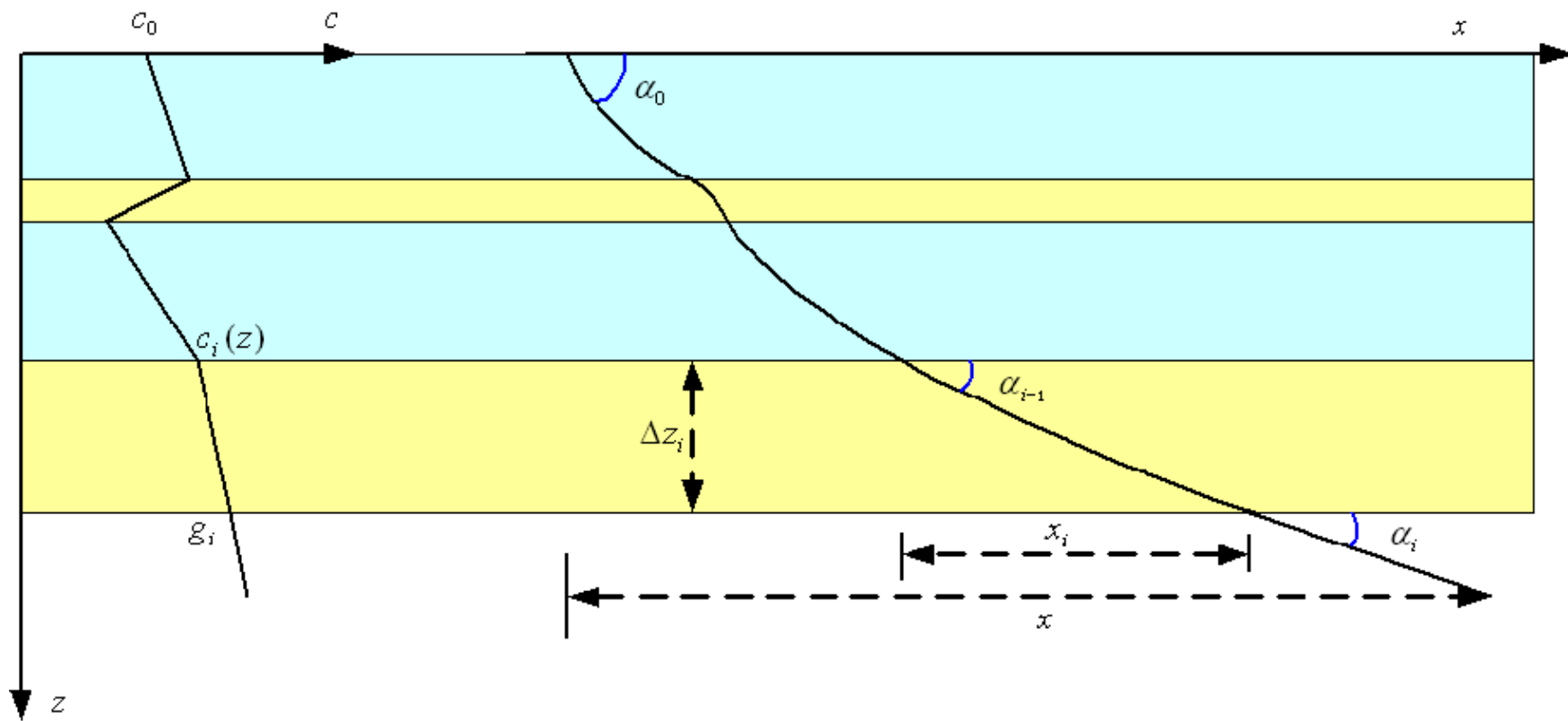
(3) 声线传播时间

当声速梯度恒定值，根据Snell定律有：

$$\begin{aligned} dz &= -\frac{c(z_1)\sin\alpha}{g\cos\alpha_1}d\alpha \\ t &= \left| \int_{z_1}^z \frac{dz}{c(z)\sin\alpha} \right| \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad t = \left| \frac{1}{g} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} \right|$$
$$t = \left| \frac{1}{2g} \left(\ln \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} - \ln \frac{1+\sin\alpha_1}{1-\sin\alpha_1} \right) \right| = \left| \frac{1}{g} \ln \left[\frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right] \right|$$

3、线性分层介质中的声线图

线性声速分层近似下的声线图



3、线性分层介质中的声线图

声线第*i*层中的水平距离

$$x_i = \frac{z_i - z_{i-1}}{\operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} (\alpha_i + \alpha_{i-1}) \right]} \quad x_i = \left| \frac{c_i}{\cos \alpha_i g_i} (\sin \alpha_i - \sin \alpha_{i-1}) \right|$$

总的声线水平传播距离

$$x = \frac{c_0}{\cos \alpha_0} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\sin \alpha_i - \sin \alpha_{i-1}}{g_i} \right|$$



声线轨迹是不同曲率圆弧的组合。

3、线性分层介质中的声线图

声线在第*i*层中的传播时间

$$t_i = \left| \frac{1}{g_i} \ln \left[\frac{\tan \left(\frac{\alpha_i}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\tan \left(\frac{\alpha_{i-1}}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \right] \right|$$

总声线的传播时间

$$t = \sum_{i=1}^N \left| \frac{1}{g_i} \ln \left[\frac{\tan \left(\frac{\alpha_i}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\tan \left(\frac{\alpha_{i-1}}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \right] \right|$$

4、声强度

射线声学的声强计算公式为：

$$I(x, z) = \frac{W \cos \alpha_0}{x \left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \sin \alpha}$$

$\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0}$ 为距离 x 对声源处掠射角 α_0 的导数。

(1) 单层线性介质

层中（恒定声速梯度）声线水平传播距离：

$$x = \left| \frac{c_0}{\cos \alpha_0 \cdot g} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha(z)) \right|$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} = \left| \frac{c_0}{g \cos^2 \alpha_0} \left(1 - \sin \alpha_0 \sin \alpha - \cos \alpha_0 \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_0} \right) \right|$$

根据Snell定律，有：

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_0} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha_0}{\sin \alpha \cos \alpha_0}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} = \frac{x}{\cos \alpha_0 \sin \alpha} \quad \longrightarrow \quad I(x, z) = \frac{W \cos^2 \alpha_0}{x^2}$$

(2) 多层线性分层介质

$$x_i = \left| \frac{c_i}{\cos \alpha_i g_i} (\sin \alpha_i - \sin \alpha_{i+1}) \right|$$

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} = \left| \sum_{i=1}^N \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_0} \right| = \sum_{i=1}^N \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} \frac{x_i}{\sin \alpha_{i-1} \sin \alpha_i}$$

$$I(x, z) = \frac{W \cos \alpha_0}{x \sin \alpha \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sin \alpha_{i-1} \sin \alpha_i}}$$

(3) 声源指向性的影响

假设声源声强辐射具有轴对称性指向性，则单层线性分层介质的声强公式：

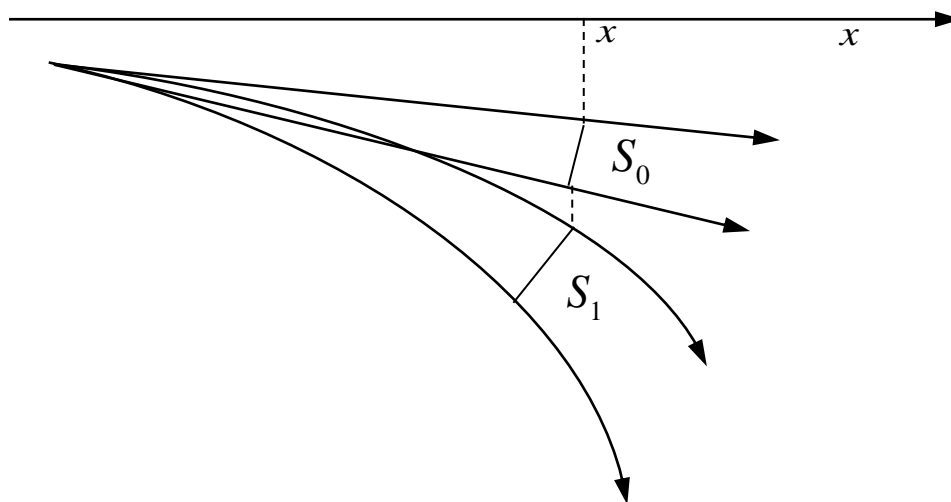
$$I(x, z) = \frac{WD(\alpha_0) \cos \alpha_0}{x \left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \sin \alpha}$$

多层线性分层介质的声强公式：

$$I(x, z) = \frac{WD(\alpha_0) \cos \alpha_0}{x \sin \alpha \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sin \alpha_i \sin \alpha_{i-1}}}$$

5、聚焦因子

在分层不均匀介质中，声线弯曲使传播声能的声线管束横截面的面积发生变化，在相同的水平距离上，均匀与不均匀介质截面上声强不等。



聚焦因子F:

定义：不均匀介质中声强与均匀介质中的声强
(球面波扩展声强) 之比

$$F(x, z) = \frac{I(x, z)}{I_0} = \frac{R^2 \cos \alpha_0}{x \left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \sin \alpha}$$

若斜距 R 近似等于水平距离 x , 则:

$$F(x, z) = \frac{x \cos \alpha_0}{\left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \sin \alpha}$$

物理含义：

- ① F 描述了声能相对会集程度。
- ② $F < 1$ 说明射线管束发散大于球面波发散。
- ③ $F > 1$ 说明射线管束发散小于球面波发散。

分层介质中聚焦因子 F :

$$F(x, z) = \frac{x \cos^2 \alpha_0}{\sin \alpha \sin \alpha_0 \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sin \alpha_i \sin \alpha_{i-1}}}$$

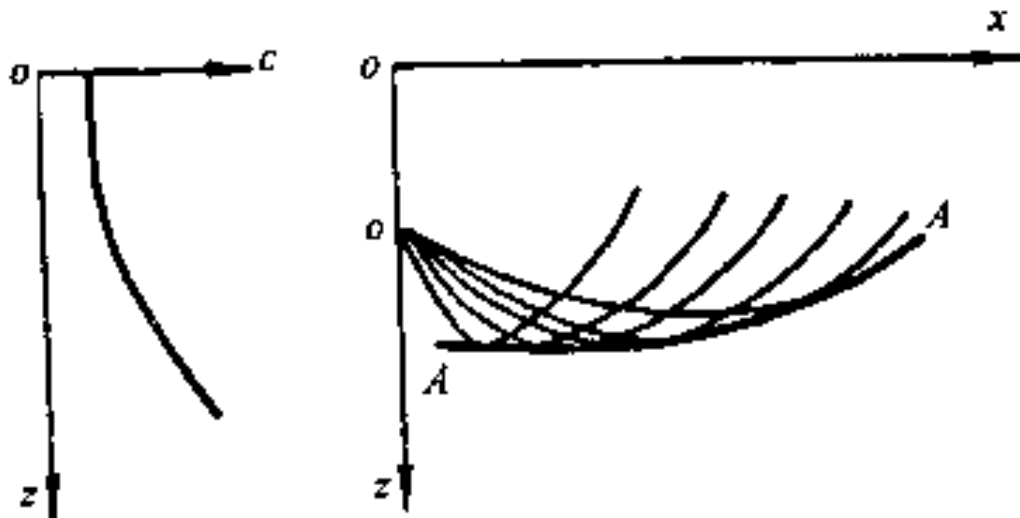
远距离传播时，声线掠射角较小，则

$$F(x, z) = \frac{x}{\alpha \alpha_0 \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\alpha_i \alpha_{i-1}}}$$

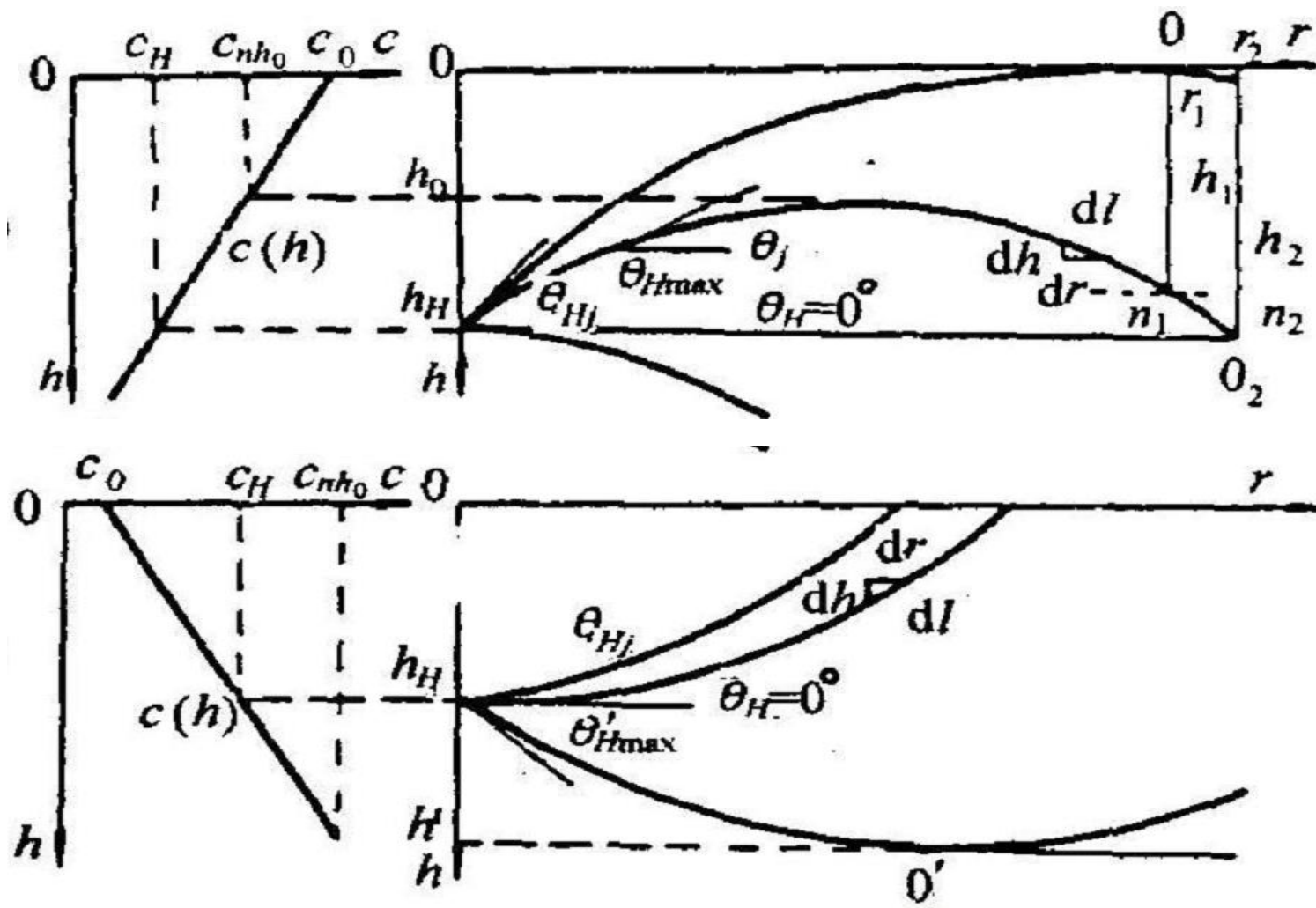
6、焦散线

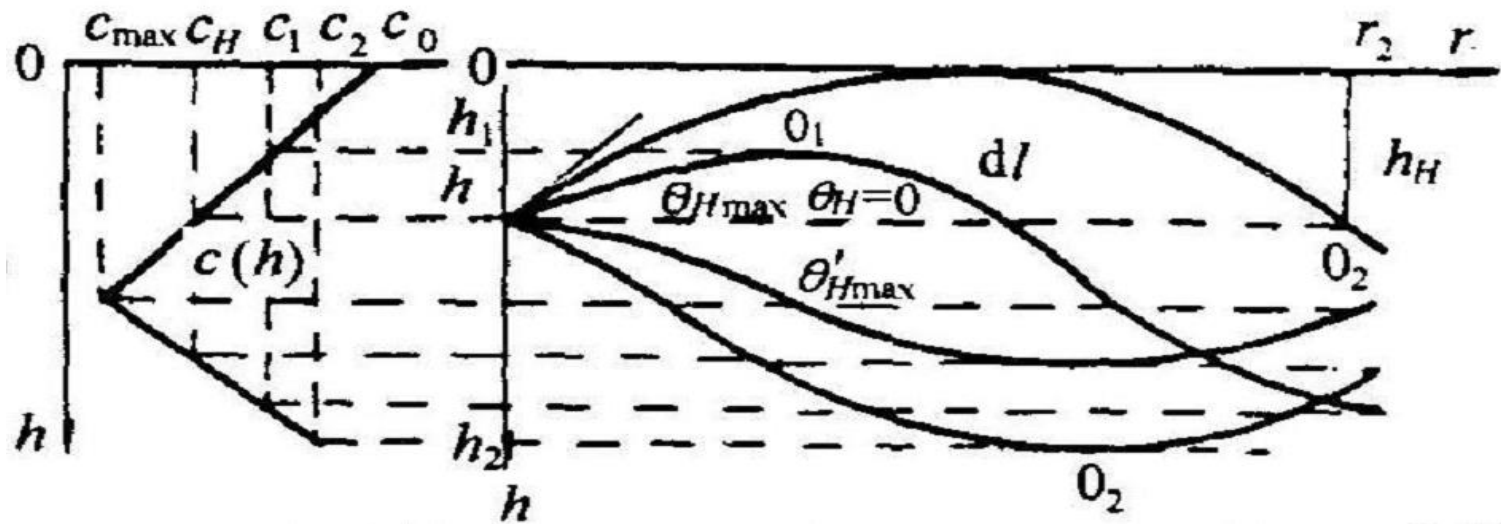
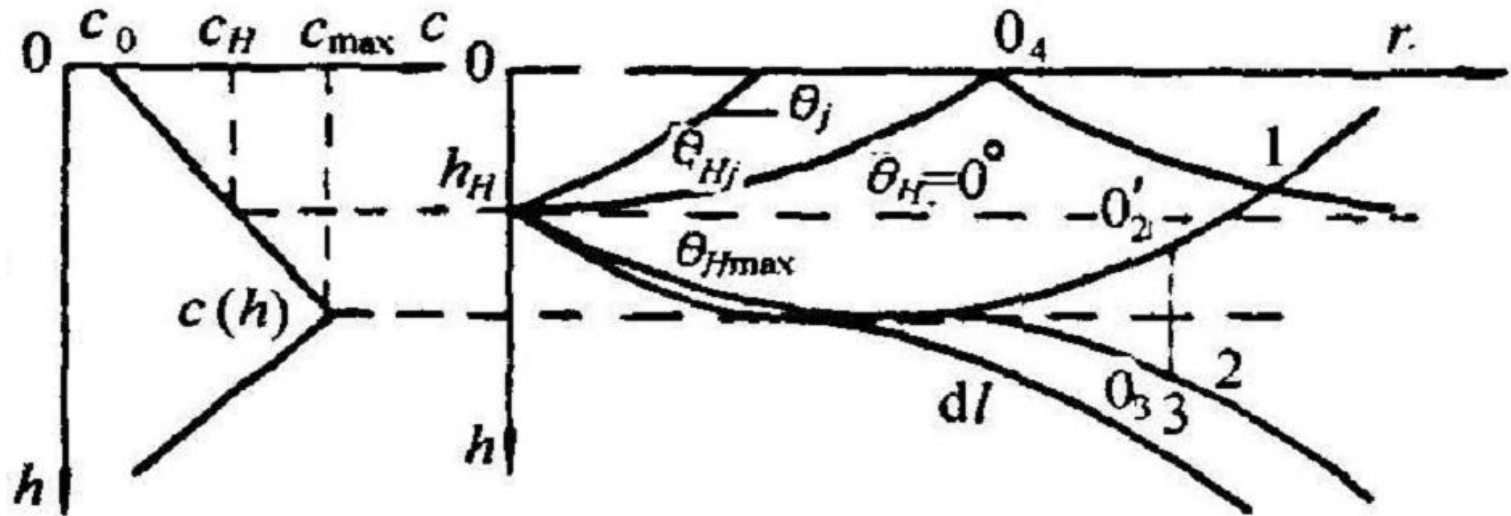
当 $(\partial x / \partial \alpha)_{\alpha_0} \rightarrow 0$ 时, $F(x, z) \rightarrow \infty$, 声强急剧增强, 称为**焦散点**, 射线声学不再适用。

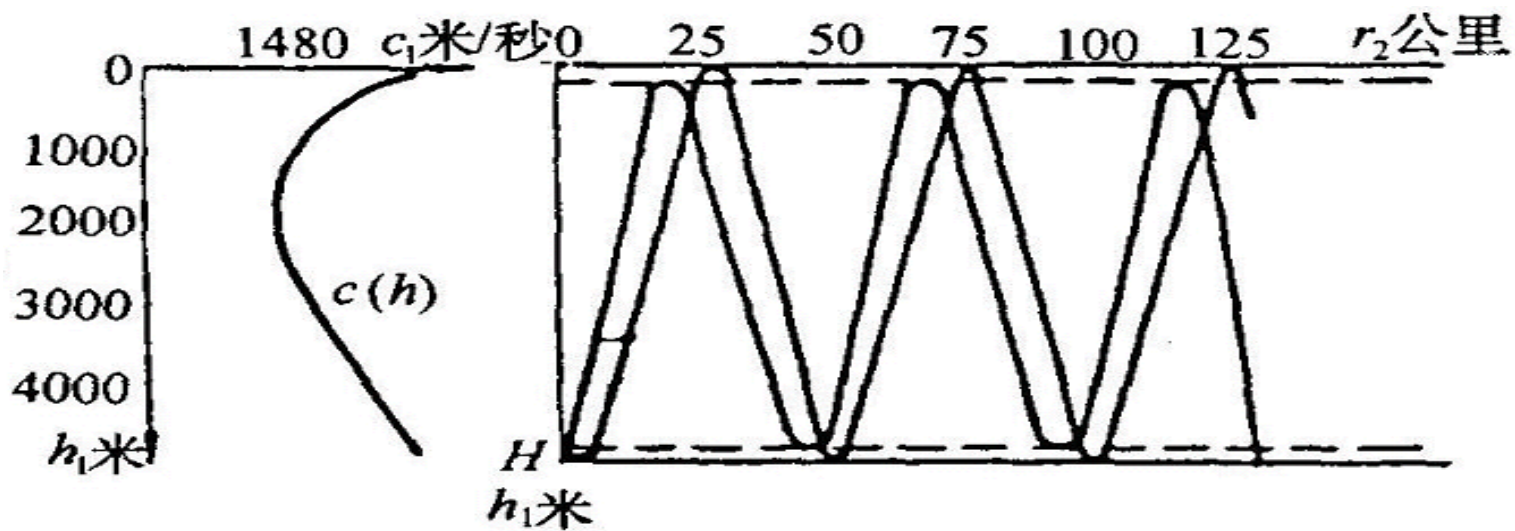
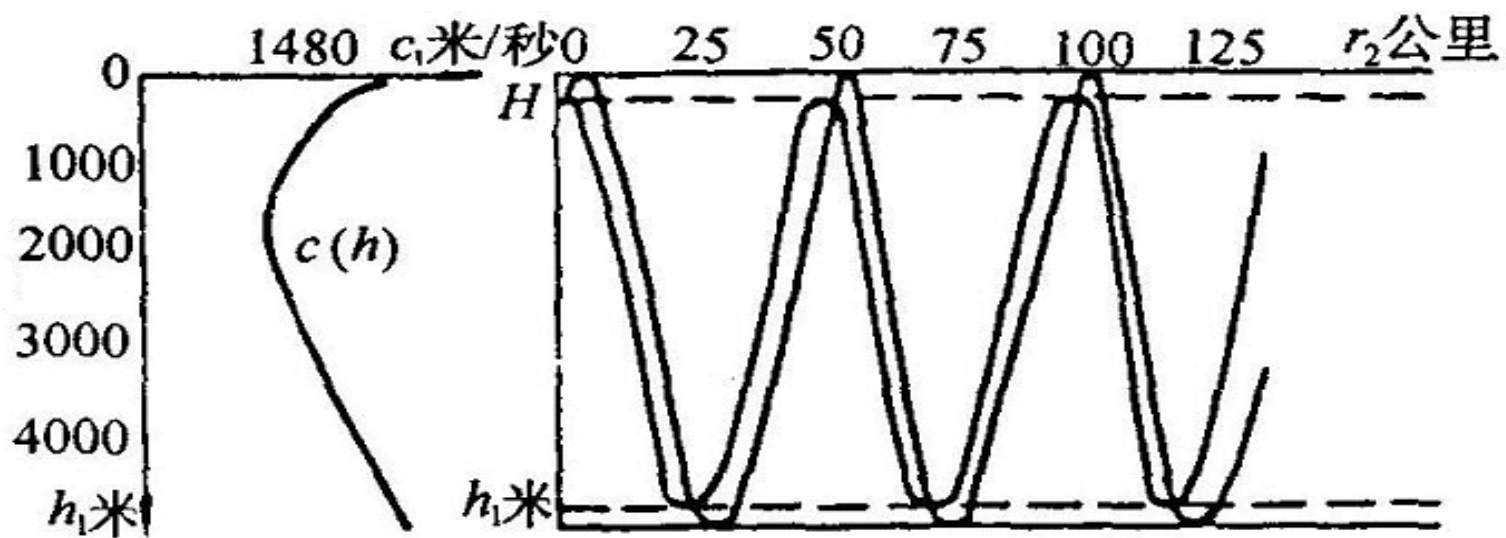
射线族上满足 $(\partial x(\alpha, z) / \partial \alpha)_{\alpha_0} = 0$ 点的包络称为**焦散线**。



7、典型声速分布介质中的声线图









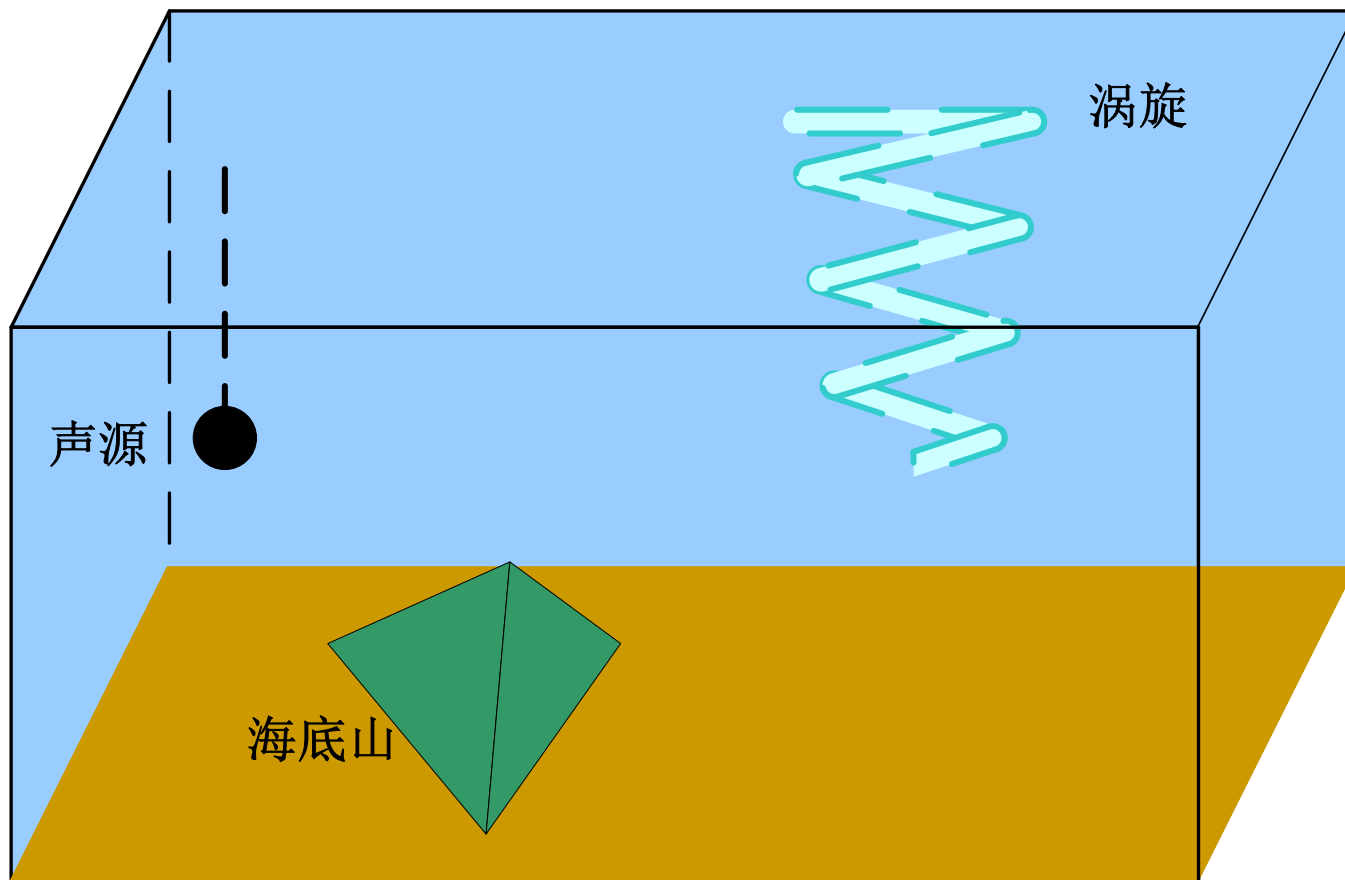
(1) 声线轨迹不仅与声速分布有关，还与声源位置有关系；

(2) 声场固定点（接收点）可能没有声线到达，或有一条声线到达，也可能有几条声线都到达（本征声线）。

8、分层介质中射线声学基本计算公式

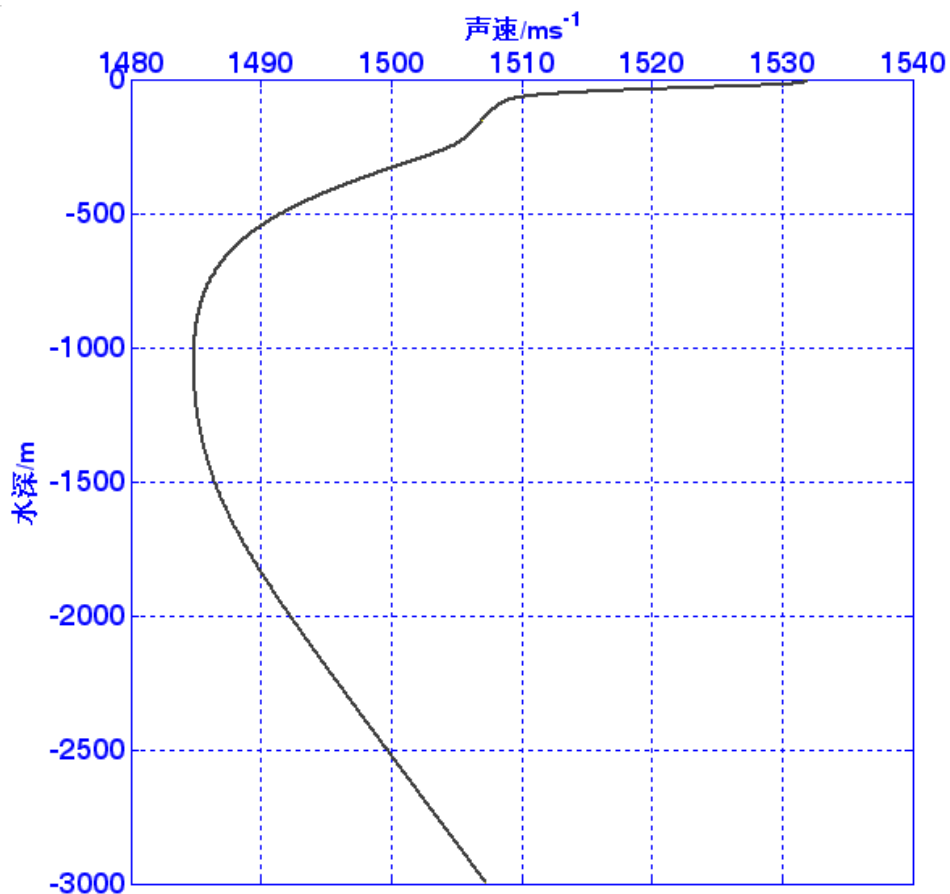
Snell定律	$\frac{\cos \alpha_i}{c_i} = \frac{\cos \alpha_0}{c_0}$	层中曲率半径	$R_i = \left \frac{1}{a_i \cos \alpha_{i-1}} \right $
层厚	$h_i = z_i - z_{i-1}$	层中声线水平距离	$x_i = \frac{z_i - z_{i-1}}{\operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} (\alpha_i + \alpha_{i-1}) \right]}$
声速梯度	$g_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{(z_i - z_{i-1})}$		$x_i = \left \frac{c_i}{\cos \alpha_i g_i} (\sin \alpha_i - \sin \alpha_{i-1}) \right $
相对声速梯度	$a_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{c_{i-1} (z_i - z_{i-1})}$	层中声线传播时间	$t_i = \left \frac{1}{g_i} \ln \left[\frac{\tan \left(\frac{\alpha_i}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\tan \left(\frac{\alpha_{i-1}}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \right] \right $
层中声速	$c(z) = c_{i-1} \left[1 + a_i (z - z_{i-1}) \right]$	声强	$I(x, z) = \frac{WD(\alpha_0) \cos \alpha_0}{x \sin \alpha \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sin \alpha_i \sin \alpha_{i-1}}}$
层中声线轨迹方程	$\left(x - \frac{\tan \alpha_{i-1}}{a_i} \right)^2 + \left(z + \frac{1}{a_i} \right)^2 = \left(\frac{1}{a_i \cos \alpha_{i-1}} \right)^2$	聚焦因子	$F(x, z) = \frac{x \cos^2 \alpha_0}{\sin \alpha \sin \alpha_0 \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sin \alpha_i \sin \alpha_{i-1}}}$

9、算例



三维环境信道模型

9、算例



声线轨迹绘图

声速剖面

3.5 波动声学与射线声学的比较

波动理论	射线理论
<p>给出完整的解析解； 很难解释简正波物理意义； 不易处理实际边界条件； 易于加入源函数； 计算繁琐； 适用于低频。</p>	<p>不能处理影区和焦散区附近的声场； 容易画声线，图象物理意义清晰直观； 易于处理实际边界条件； 与声源无关； 计算简单； 适用于高频。</p>



THE END