

剑桥分析学派

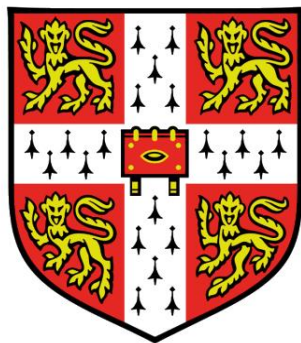
— 从麦克斯韦到哈代的数学

娄增建

2023·4·2



- 剑桥大学
- 三一学院
- 辉煌的牛顿时代
- 英国数学的衰败
- 剑桥分析学会
- 剑桥数学物理学派
- 麦克斯韦
- 哈代
 - 哈代与罗素
 - 哈代与李特尔伍德
 - 哈代与华罗庚
 - 哈代与拉马努金
 - 哈代与上帝
 - 哈代与华林猜想
 - 哈代与哥德巴赫猜想
 - 哈代与黎曼猜想
 - 哈代与孪生素数猜想



UNIVERSITY OF
CAMBRIDGE

剑桥大学

(University of Cambridge)

世界顶尖的研究型大学，采用书院联邦制，坐落于英国剑桥。是英语世界中第二古老的大学，前身是一个于1209年成立的学者协会

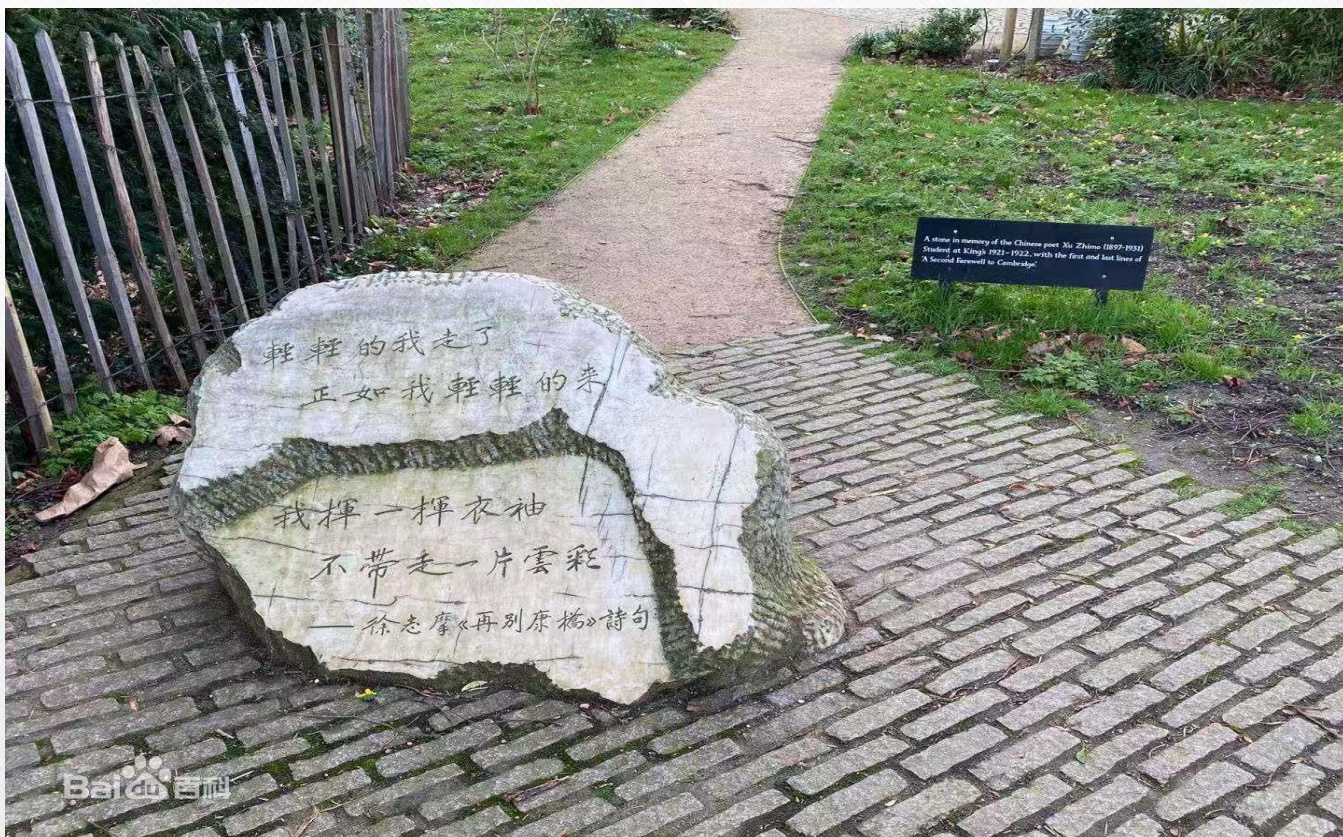
八百多年的校史汇聚了

- 艾萨克·牛顿、开尔文、麦克斯韦、玻尔、玻恩、狄拉克、奥本海默、霍金、达尔文、沃森、克里克、马尔萨斯、马歇尔、凯恩斯、图灵、怀尔斯、华罗庚等科学巨匠
- 培根、罗素、约翰·弥尔顿、拜伦、丁尼生、维特根斯坦等文哲大师
- 克伦威尔、尼赫鲁、李光耀等政治人物以及罗伯特·沃波尔（首任）在内的15位英国首相

共有120位诺贝尔奖、11位菲尔兹奖、7位图灵奖得主



剑桥前的康河



再別康橋（徐志摩）：輕輕的我走了，正如我輕輕的來；我輕輕的招手，作別西天的雲彩。那河畔的金柳，是夕陽中的新娘；波光里的艷影，在我的心頭蕩漾……



TRINITY
COLLEGE
CAMBRIDGE

剑桥大学三一学院

(Trinity College, Cambridge)

剑桥大学中规模最大、财力最雄厚、最有影响的学院之一，
拥有约600名大学生，300名研究生和180名教授

由英国国王亨利八世于1546年所建，其前身是1317年建立的国王学堂。今天学院中依然保留着的最古老的建筑可一直追溯到中世纪时期国王学堂所使用的学院钟楼，直到今天还在为学院报时



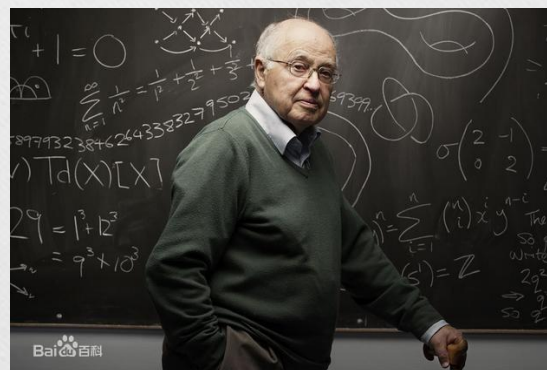
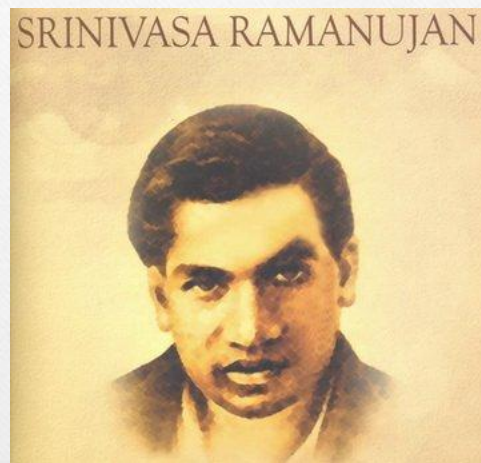




相传是牛顿发现万有引力的苹果树后代

著名校友

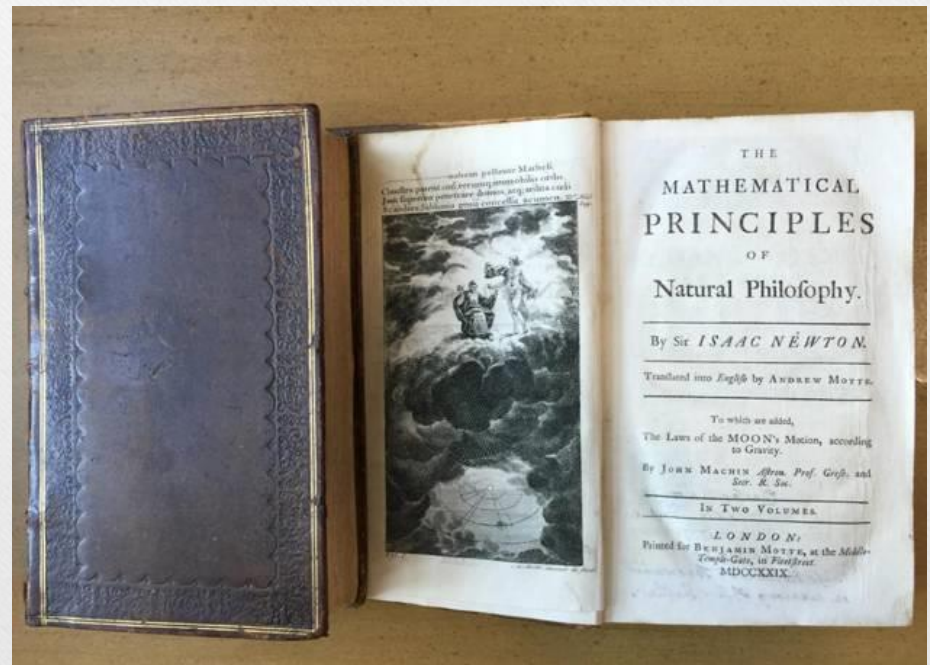
- 艾萨克·牛顿，伟大的物理学家 数学家 天文学家
- 詹姆斯·克拉克·麦克斯韦，著名的物理学家
- **G·H·哈代**，数学家
- 斯里尼瓦瑟·拉马努金 数学家
- 迈克尔·阿蒂亚 数学家
- 弗兰西斯·培根，著名的哲学家
- **伯特兰·罗素**，哲学家
- 拜伦，诗人
- 安德鲁·马维尔，诗人
- 爱德华·菲兹杰拉德，诗人
- 阿尔弗雷德·怀特海，哲学家
- A·A·弥尔纳，作家
- 路德维奇·维特根斯坦，哲学家
- 尼赫鲁，印度首任总理 政治家
- 乔治六世，英国国王
- 拉吉夫·甘地，印度总理
- 查尔斯王储，英国王储
- 埃迪·雷德梅尼，奥斯卡影帝
- 。 。 。



辉煌的牛顿时代

英国数学也曾有过辉煌的时代—17世纪下半叶至18世纪初，核心人物是巴罗（牛顿的老师）和牛顿。巴罗的数学思想中已经有微积分的雏形，而牛顿独立创立了微积分，在数学史上与德国的莱布尼兹并称为微积分的两大创始人。

牛顿在《自然哲学的数学原理》中用三大定律（惯性定律、加速度定律、作用与反作用定律）为公理，利用其自创的微积分，用数学定量方法表述的定律说明自然现象，其科学研究方法支配后世近300年的物理学研究。



科学巨人艾萨克·巴罗

艾萨克·巴罗（1630~1677；Isaac Barrow），英国数学家

- 1630，生于伦敦
- 1643，入剑桥大学三一学院
- 1648，获学士学位
- 1662，任伦敦格雷沙姆几何教授
- 1664，任剑桥首届卢卡斯教授
- 1672，任三一学院院长

最重要的科学著作是《光学讲义》和《几何学讲义》，后者包含了他对无穷小分析的卓越贡献，其中“通过计算求切线的方法”已十分接近微积分基本定理，微积分最终由其学生牛顿完成。巴罗最先发现了牛顿的天才，并于1669年自动辞去卢卡斯教授之职，举荐牛顿继任。26岁的牛顿晋升为数学教授。巴罗让贤，在科学史上传为佳话。



百科全书式的“全才”

- 艾萨克·牛顿

艾萨克·牛顿（1643—1727）爵士，英国皇家学会会长，英国著名的物理学家，百科全书式的“全才”，著有《自然哲学的数学原理》、《光学》。

牛顿曾说：“如果说我看得远，那是因为我站在巨人的肩膀上。”如果我们不去追究牛顿这句话的本来含义，只从字面上来看牛顿的成就，确实是之前众多“巨人”成就的最高体现。而巴罗就是这些“巨人”之一。



英国数学的衰败

牛顿之后的整个18世纪，英国数学却趋于衰退。虽然有泰勒、麦克劳林贡献的泰勒定理，贝叶斯贡献的贝叶斯统计等，但相比于欧洲大陆上的群星璀璨，英国数学显然落后了。对于这一历史现象，其中一个理由是牛顿和莱布尼兹的微积分发明权之争以及英法政治对立导致英国和欧洲大陆学术交流受阻，造成英国数学和欧洲大陆数学越来越大的差距。

更深层次的原因在于欧洲革命的中心在英国资产阶级革命后已经转移至大陆。主要表现在两国统治阶级对科学的态度上。法国资产阶级革命政权和拿破仑政权出于各方面需要会全力支持科学的发展，而英国统治阶级出于对科学研究的漠视和对法国大革命的恐惧，坚决抵制法国科学文化在英国的传播，以至于十进制度量衡被英国政府禁止传播。



剑桥分析学会

18世纪末19世纪初，出现了改革的呼声。在早期的改革者中，罗伯特·伍德豪斯是重要的一位。伍德豪斯长期在剑桥任教，1803年发表《分析演算原理》，分析了英国数学的落后，批评了对牛顿的盲目崇拜，首次大胆地采用了莱伯尼兹的微分记号。他的观点，鼓舞了一批在剑桥的青年学生，他们发起了一场卓有成效的数学改革运动。他们的组织，就是剑桥分析学会。

主要成员：

- 查尔斯·巴贝奇，英国发明家，电脑先驱，卢卡斯数学教授。1812年协助建立分析学会，宗旨是向英国介绍欧洲大陆在数学方面的成就；
- G·皮考克，英国数学家。皮考克1791年4月9日生于英国登顿（Denton），1809年入剑桥大学三一学院；
- J·F·W·赫歇尔爵士，出生于英国白金汉郡的斯劳，英国天文学家、数学家、化学家及摄影师。



分析学会的主要工作

打破英国与欧洲大陆数学间的壁垒，学习欧洲大陆的分析学文献，翻译欧洲数学著作。1813年，学会出版了《分析学会论文集》，从符号和方法贯彻了莱布尼兹的体系。学会成员们突破了当时英国学界将微积分发现全部归功于牛顿的偏见，指出微积分

“最先是由费马发现，而牛顿使其完善并给予了解析表述，莱布尼兹则以强有力的普适符号极大地丰富了这门科学”

1820年起，剑桥数学试卷全面用莱布尼兹记号，引起英国其他大学的纷纷效仿。标志着分析学会的改革运动取得成功，大陆新分析开始在英国迅速传播。学会成员们已经意识到分析学会已经完成了它的历史使命。分析学会改组为剑桥哲学会。

剑桥数学物理学派

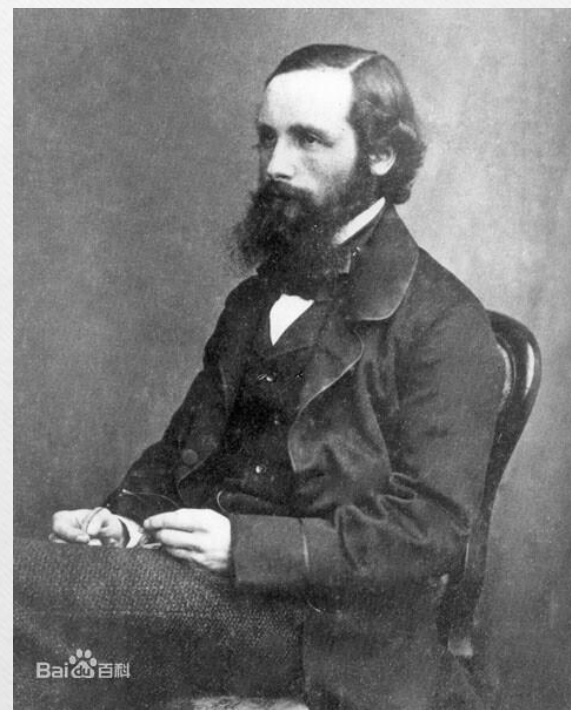
分析学会一扫牛顿以后英国数学僵化，为剑桥历史上一个新的光辉时期揭开了序幕。然而学会成员们未来的工作领域大都离开了分析，沿着分析学会开辟的道路前进，在分析领域中攀上新的高峰而使剑桥数学威名重振的任务，是由剑桥数学物理学派来担当的，核心人物有格林、汤姆生、斯托克斯和麦克斯韦。

- 乔治·格林 (George Green, 1793-1841)，英国科学家，1828年发表《论应用数学分析于电磁学》；
- 威廉·汤姆森 (William Thomson, 1824-1907)，英国的数学物理学家、工程师，是热力学温标（绝对温标）的发明人，被称为热力学之父；
- 斯托克斯 (George Gabriel Stokes, 1819~1903)，英国数学家，剑桥大学任卢卡斯讲座教授，皇家学会会长。

麦克斯韦 (James C. Maxwell)

詹姆斯·克拉克·麦克斯韦（1831-1879），英国物理学家、数学家。经典电动力学的创始人，统计物理学奠基人之一。

- 1850，剑桥大学三一学院数学系学习
- 1854，毕业留校任职
- 1856，在苏格兰阿伯丁的马里沙耳任自然哲学教授
- 1860，到伦敦国王学院任自然哲学和天文学教授
- 1861，选为伦敦皇家学会会员
- 1865，辞去教职回到家乡系统地总结他的关于电磁学的研究成果，完成了电磁场理论的经典巨著《论电和磁》，并于1873年出版
- 1871，受聘为剑桥大学卡文迪什试验物理学教授，负责筹建著名的卡文迪什实验室
- 1874，建成后担任这个实验室的第一任主任，直到1879年11月5日在剑桥逝世。



麦克斯韦主要从事电磁理论、分子物理学、统计物理学、光学、力学、弹性理论方面的研究。尤其是他建立的电磁场理论，将电学、磁学、光学统一起来，是19世纪物理学发展的最光辉的成果，是科学史上最伟大的综合之一。



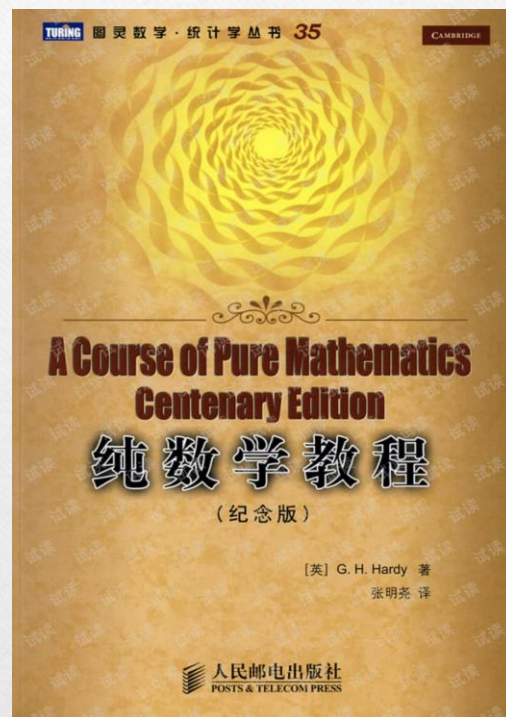
爱因斯坦评价其建树“是牛顿以来，物理学最深刻和最富有成果的工作。

科学史上，称牛顿把天上和地上的运动规律统一起来，是第一次大统一。麦克斯韦在电磁学上取得的成就被誉为继牛顿之后，“物理学的第二次大统一”。

**麦克斯韦被普遍认为是对20世纪最有影响力
的19世纪物理学家，对基础自然科学的贡献仅次于牛顿**

之后的剑桥数学

麦克斯韦之后的剑桥数学的代表人物是哈代、李特尔伍德，以及哈代的印度学生拉马努金，主要工作为纯粹数学，他们继承了“分析学会”纯粹数学的道路。哈代于1908年出版《纯粹数学教程》，是英国第一本严格初等分析教材。



哈代 (Godfrey H. Hardy)

20世纪数学史上伟大的数学家

剑桥分析学派的创始人

对其他数学家的重要影响及贡献

学高身正之典范



- 1877，生于英国克利兰
- 1890，温彻斯特学院
- 1896-1900，剑桥大学三一学院
- 1900-1906，三一学院研究员
- 1906-1919，剑桥大学讲师(1910当选为英国皇家学会院士)
- 1911，与李特伍德开始长达35年的合作，合作近100篇论文
- 1913，发现拉马努金（“一生中最大的数学贡献”）
- 1919-1931，牛津大学教授
- 1931-1942，剑桥大学教授
- 1942，退休
- 1947，卒于剑桥



哈代的数学贡献涉及解析数论、调和分析、函数论等方面，同时是回归数现象发现者。他一生著述颇丰，计有8部专业书籍和大约350篇论文。被誉为20世纪杰出的分析学家。在20世纪上半叶建立了具有世界水平的英国分析学派。

- 1920，获皇家勋章
- 1929，获德·摩根奖章
- 1940，获西尔威斯特奖章
- 1947，获皇家学会最高奖章科普利奖章
- 1947，当选为法国科学院外籍院士



作为一位知名数学家，哈代的人品和他的学问同样受到赞誉。他富于正义感，痛恨战争，一生中不喜欢任何虚伪的东西。

- 哈代与罗素

伯特兰·罗素（Bertrand A.W. Russell，1872-1970），英国哲学家、数学家、逻辑学家、历史学家、文学家，分析哲学的主要创始人，世界和平运动的倡导者和组织者。罗素1950年获得诺贝尔文学奖，主要作品有《西方哲学史》《哲学问题》《心的分析》《物的分析》等。

- 1890，考入剑桥大学三一学院，后曾两度在该校任教
- 1908，当选为皇家学会会员
- 1950，获诺贝尔文学奖，并被授予英国嘉行勋章
- 1967，组织了斯德哥尔摩战争罪犯审判法庭，谴责美国在越南的政策
- 1970，在威尔士的家中去世

他在一战中因为坚持反战而被剑桥三一学院开除教职。哈代立刻发起了一场抗议活动，希望三一学院请回罗素。他并且表示，不达目的，决不罢休。在抗议失败后他毅然决然辞去剑桥教授职务离开剑桥。

罗素悖论：

设集合S是由一切不属于自身的集合所组成，
即“ $S = \{x | x \text{ 不属于 } x\}$ ”。

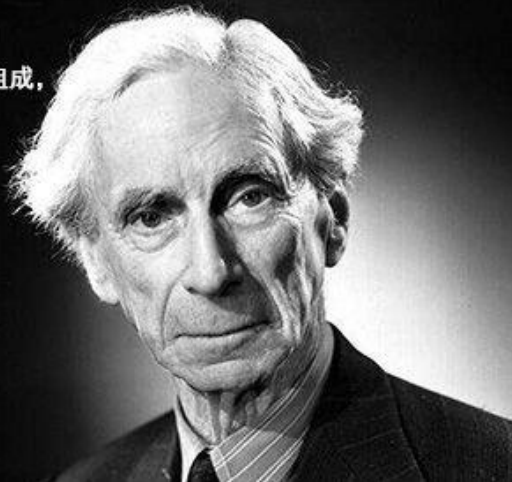
那么问题是：S包含于S是否成立？

首先：

若S包含于S，则不符合x不属于S，
则S不包含于S；

其次：

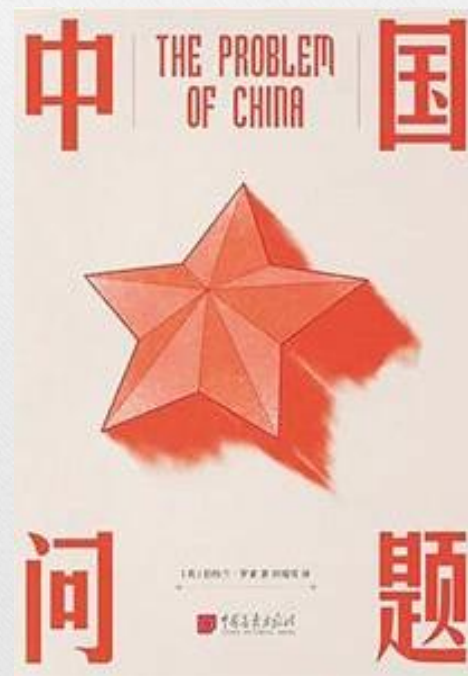
若S不包含于S，
则符合x不属于S，S包含于S



- 数学领域中，罗素专研数学的逻辑性辩证，提出知名的罗素悖论并与其恩师怀海德共同发表了试图阐述数学真理的巨著——《数学原理》
- 在哲学上，罗素著有著名的《西方哲学史》一书，他和摩尔（G. E. Moore）、弗雷格、维特根斯坦等人开创了逻辑应用的分析哲学，提出了摹状词理论，成为分析哲学的经典
- 罗素跟维根斯坦一起发展出逻辑原子论，深刻地影响了逻辑实证论中的检证原则。

在1920年代，罗素就曾经访问中国，多次在国际社会上为中国人民发声：“假如早一点善待新中国，世界局势当已经好转”。

- 言论自由只有在政府认为它自身安全的时候才存在。
- 不用盲目地崇拜任何权威，因为你总能找到相反的权威。《自由思想的十诫》
- 人生而无知，但是并不愚蠢，是教育使人愚蠢。



- 哈代与李特尔伍德

李特尔伍德 (John E. Littlewood, 1885-1977) 英国数学家

- 1885, 生于罗彻斯特
- 1892-1900, 南非, 曾在开普敦就学
- 1904, 结识哈代
- 1907, 毕业于剑桥大学
- 1907-1910, 任教于曼彻斯特大学
- 1911, 开始和哈代合作一共合作了35年, 建立了深厚的友谊
- 1928, 英国剑桥大学教授, 至1950年退休
- 1977, 卒于剑桥



哈代长李特尔伍德8岁，在长达35年的合作中，联名发表了约100篇论文，其中包括丢番图逼近、堆垒数论、数的积性理论、黎曼 ξ 函数、不等式、一般积分、三角级数等广泛的内容。哈代-李特尔伍德极大函数，哈代-李特尔伍德圆法，哈代-李特尔伍德定理等联系着二人名字的数学成果正是他们亲密合作的写照。



他和哈代长期合作，在20世纪上半叶建立了英国的具有世界水平的分析学派。

- 哈代与华罗庚



华罗庚简介：

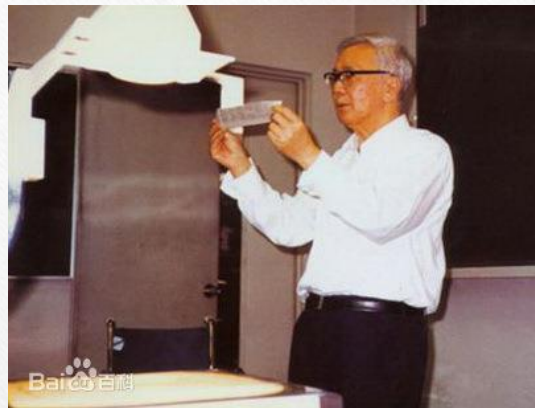
- 1910，出生于江苏常州
- 1922，进入县立初级中学（现江苏省华罗庚中学）
- 1925，就读上海中华职业学校，因无学费而退学，帮父亲料理杂货铺，一生只有初中文凭。此后，用5年时间自学高中和大学低年级全部数学课程
- 1929，受雇为中学庶务员，在上海《科学》杂志上发表论文
- 1930，发表《…代数的五次方程式解法…》轰动数学界。清华大学数学系熊庆来得知其经历和才华后，打破常规，让他进入清华图书馆任馆员
- 1931，清华大学任助理，自学英、法、德、日语，在国外杂志上发表3篇论文
- 1933，破格提升为助教，1934年9月，被提升为讲师

- 哈代与华罗庚

- 1935, 数学家维纳访问中国, 注意到华罗庚的潜质, 向哈代极力推荐
- 1936, 前往剑桥大学(两年), 在华林问题取得很多结果, 受哈代—李特尔伍德学派影响, 至少15篇文章是在剑桥发表, 在世界上赢得了声誉
- 1937, 回清华大学任教授, 后至昆明的国立西南联合大学直至1945年
- 1946, 访问苏联; 访问普林斯顿高等研究院
- 1947, 《堆垒素数论》在苏联出版, 出版了德、英、日、匈牙利和中文版
- 1948, 被美伊利诺依大学聘为教授至1950年
- 1950, 携家人由美回京, 途中写下《致中国全体留美学生的公开信》, 之后回到清华园, 担任清华大学数学系主任



“科学没有国界，科学家是有自己的祖国的”



- 1952，中国科学院数学研究所首任所长
- 1955，被聘为中国科学院学部委员（院士）
- 1956，筹建中国科学院计算所，获国家自然科学一等奖，出版俄、英文版专著
- 1958，任中国科技大学副校长兼数学系主任
- 1983，赴加州理工学院作为期一年的讲学，被选为第三世界科学院院士
- 1984，获美国科学院外籍院士
- 1985，入选德国巴伐利亚科学院院士
- 1985，在东京大学数理学部向日本数学界演讲时，由于突发急性心肌梗塞，于当日晚上逝世。

主要成就:

- ✓ 解决高斯完整三角和估计难题、华林和塔里问题改进、一维射影几何基本定理证明、近代数论方法应用研究等方面获得出色成果;
- ✓ 国际上颇具盛名的“中国解析数论学派”即华罗庚开创的学派,该学派对于质数分布问题与哥德巴赫猜想做出了许多重大贡献;
- ✓ 是中国解析数论、矩阵几何学、典型群、自守函数论等多方面研究的创始;
- ✓ 在多复变函数论,典型群方面的研究领先西方数学界10多年,是国际上有名的“典型群中国学派”。

国际上以华氏命名的数学科研成果就有“华氏定理”、“怀依—华不等式”、“华氏不等式”、“普劳威尔—加当—华定理”、“华氏算子”、“华—王方法”等。

华罗庚一生留下了六十余部著作,其中十部巨著(八部为中国国外翻译出版),列入20世纪数学的经典著作之列。此外,还有学术论文150余篇



机会只会给有准备的人!

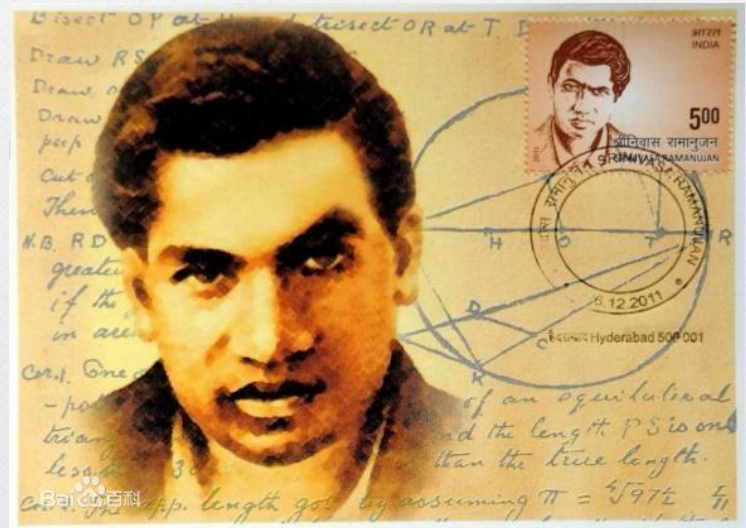
-路易斯●巴斯德（法国著名微生物学家、化学家）

- 哈代与拉马努金

斯里尼瓦瑟·拉马努金（1887-1920）是印度历史上最著名的数学家之一。他没受过正规的高等数学教育，沉迷数论，尤爱牵涉 π 、质数等数学常数的求和公式，以及整数分拆。惯以直觉导出公式，不喜作证明（事后往往证明他是对的）。他留下的那些没有证明的公式，引发了后来的大量研究。

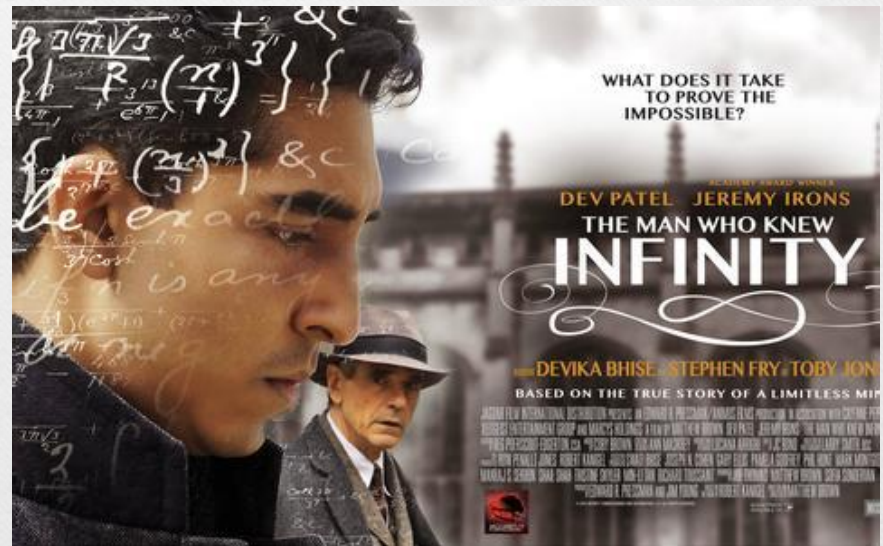
1913年初他给哈代寄了一封信，信中陈述了他对素数分布的研究并列有120条公式，涉及数学中多个领域...

哈代确信拉马努金是一位数学天才，邀请他到剑桥，开启了数学史上最伟大的合作



- 拉马努金的贡献为数学家从事数学研究提供了很好的史料，对现代数学的发展产生了难以估量的影响。他在堆垒数论特别是整数分拆方面做出了重要贡献，在椭圆函数、超几何函数、发散级数等领域也成果卓著。
- 他有很强的直觉洞察力，虽未受过严格数学训练，却能独立发现了近3900个数学公式和命题。他经常宣称在梦中娜玛卡尔女神给其启示，早晨醒来就能写下不少数学公式和命题。他所预见的数学命题，日后有许多得到了证实。

2016年4月著名投资人尤里·米尔纳在自己家中举行了一场小规模晚宴，到场嘉宾包括Google CEO皮查伊、创始人布林、Facebook CEO扎克伯格及其他数十位硅谷领袖。米尔纳放映了一部马修·布朗导演的传记体电影《知无涯者》...



只有愚者才等待机会，
而智者创造机会！

- 培根（英国哲学家）

- 哈代与上帝

~ 以逻辑胁迫上帝的数学家

哈代多年的工作日程：

1. 证明黎曼猜想

2. ...

3. ...

4. ...

5. ...

6. 证明上帝不存在

- 哈代与华林猜想

华林猜想:对于每个正整数 k ,皆存在正整数 $g(k)$,使得每个正整数都可以表示为至多 $g(k)$ 个正整数的 k 次方数之和,如每一个正整数至多是9个立方数之和;至多是19个四次方之和(英国数学家爱德华·华林1770年)

- 1909, 大卫·希尔伯特首先证明了 $g(k)$ 的存在性
- 1943, U. V. 林尼克给出 $g(k)$ 存在性另一个证明。华林推测 $g(2)=4$, $g(3)=9$, $g(4)=19$
- 1770, 拉格朗日指出 $g(2)=4$
- 1909, 亚瑟·韦伊费列治证明了 $g(3)=9$
- 1859, 刘维尔证明了 $g(4)\leq 53$
- **1923, 哈代和李特尔伍德创造圆法得到 $g(4)\leq 21$**
- 1986, 巴拉苏布拉玛尼安证明了 $g(4)=19$
- 1896, 马力特得到 $g(5)\leq 192$
- 1909, 韦伊费列治将结果改进为 $g(5)\leq 59$
- **1964, 陈景润证明了 $g(5)=37$ 。**



- 哈代与哥德巴赫猜想

哥德巴赫猜想：每个大于4的偶数是两个奇素数之和

（德国数学家C. 哥德巴赫和L. 欧拉1742年的通信中提出）

如 $6=3+3$ ， $14=3+11=7+7=11+3$

1923年，哈代和李特伍德应用圆法研究这个猜想，得到了一些重要的条件结果

И. М. 维诺格拉多夫于1937年通过改进圆法和利用他的估计线性素变数指数和方法，证明了每个充分大的奇数 n 是三个奇素数之和

华罗庚等五位数学家于1937~1938年间各自独立证明了：几乎所有的偶数是两个奇素数之和。1980年，已验证对所有不超过108的偶数，猜想是成立的，但是猜想至今仍未解决。

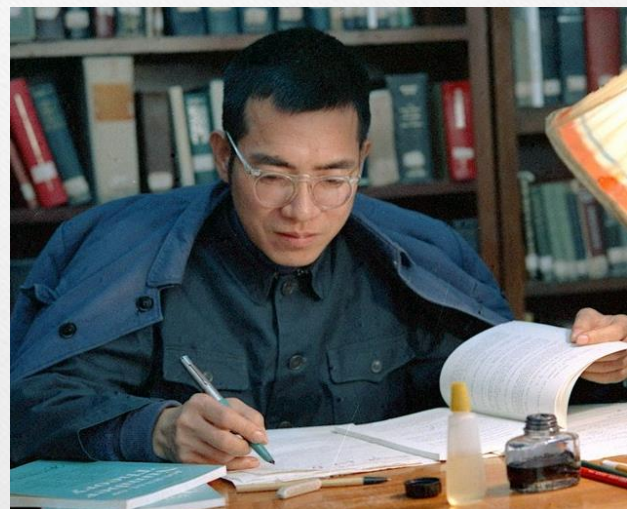


弱哥德巴赫猜想：每个充分大的偶数是不超过 a 个素因数的乘积与不超过 b 个素因数的乘积之和，记作“ $a+b$ ”。

哥德巴赫猜想大体上就是“ $1+1$ ”，筛法是研究“ $a+b$ ”的主要方法

- 1920，挪威的布朗证明了“ $9+9$ ”
- 1924，德国的拉特马赫证明了“ $7+7$ ”
- 1932，英国的埃斯特曼证明了“ $6+6$ ”
- 1937，意大利的蕾西先后证明了“ $5+7$ ”，“ $4+9$ ”
“ $3+15$ ”和“ $2+366$ ”
- 1938，苏联的布赫夕太勃证明了“ $5+5$ ”
- 1940，苏联的布赫夕太勃证明了“ $4+4$ ”

- 1956，王元证明了“ $3+4$ ”。稍后证明了“ $3+3$ ”和“ $2+3$ ”
- 1948，匈牙利的瑞尼证明了“ $1+c$ ”，其中 c 是一很大的自然数
- 1962，潘承洞和苏联的巴尔巴恩证明了“ $1+5$ ”
- 1962，王元证明了“ $1+4$ ”
- 1965，苏联的布赫夕太勃和小维诺格拉多夫，及意大利的朋比利证明了“ $1+3$ ”
- 1966，陈景润证明了“ $1+2$ ”，是迄今最好的结果，通常称之为陈景润定理





- 哈代与 黎曼猜想（数学桂冠上的明珠）

Zeta函数 $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ 的所有的复数根的虚部都等于二分之一，这就是著名黎曼猜想。

- 德国数学家波恩哈德·黎曼于1859年提出
- 德国数学家戴维·希尔伯特在1900年国际数学家大会上提出了20世纪数学家应当努力解决的23个数学问题，黎曼猜想是第八个问题
- 2000年克雷数学研究所悬赏的世界七大数学难题中也包括黎曼猜想

波恩哈德·黎曼(1826-1866)


$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{5^z} \dots$$

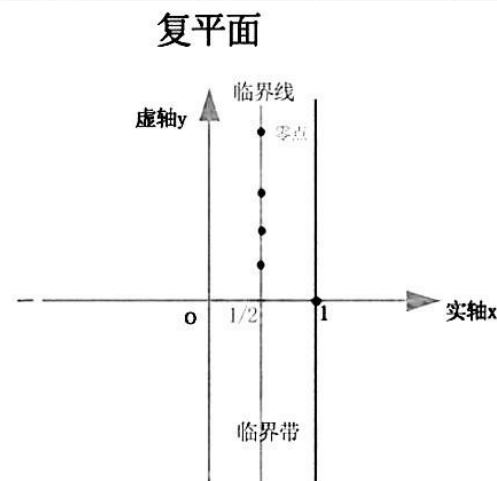
解析延拓后的形式

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-z)^s ds}{e^z - 1} \frac{dz}{z}$$

百家号·五升钟学数学

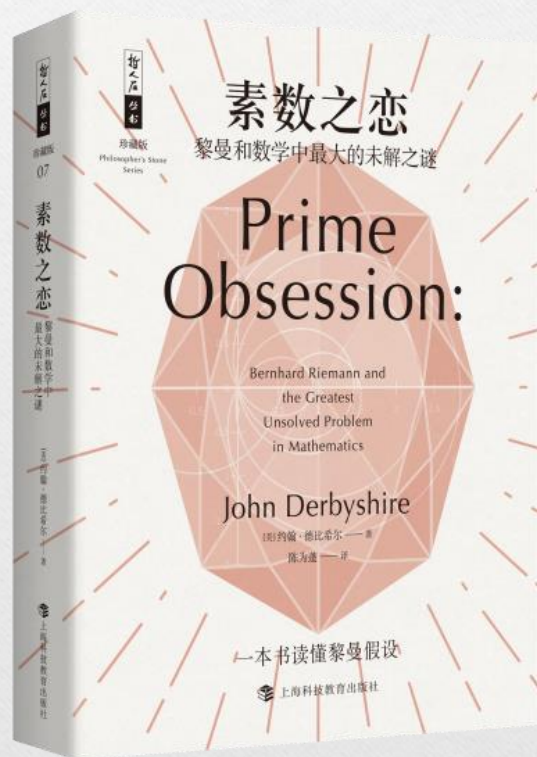
黎曼 ζ 函数的非平凡零点的分布对素数分布的细致规律有着决定性影响。

- 1896年，法国数学家哈达玛与比利时数学家普森独立证明黎曼 ζ 函数的非平凡零点只分布在带状区域的内部，非边界。结果导致了另外一个数学猜想的证明，该数学猜想如今已被称为素数定理；
- 1914年，丹麦数学家玻尔与德国数学家兰道(Landau)证明非平凡零点集中在临界线周围，即包含临界线任意窄的带状区域都包含几乎所有的非平凡零点；
- 1914，哈代证明有无穷多个非平凡零点位于临界线上；
- 1921，哈代与李特伍德对7年前那个“无穷”做出了具体估计，位于临界线上的“无穷多个非平凡零点”跟全部非平凡零点相比=百分之零；
- 1942，挪威数学家赛尔伯格终于证明了这个百分比大于零；
- 1974，美国数学家列文森证明至少有34%的零点位于临界线；
- 1980，楼世拓与姚琦证明了至少35%的零点位于临界线上；
- 1989，美国数学家康瑞证明了至少有40%的零点位于临界线上-最强结果。



同时数学家们计算零点的漫长征途上不断推进

- 1903，丹麦数学家格兰姆计算出15个零点位于临界线上；
- 1925，计算出了区区138个零点；
- 1932，德国数学家西格尔从天书般的黎曼手稿中挖掘公式-计算黎曼 ζ 函数非平凡零点的新方法称为了黎曼-西格尔公式。很快零点计算推进到了1000个以上；
- 1956-1969，被计算出的零点数目从2.5万个推进到350万个；
- 1979，零点计算就被推进到了8,100万个；
- 2001，德国研究者魏德涅夫斯基创立分布式计算，即利用联网的许多台计算机来共同计算，不久推向互联网，每天计算出的零点数目在10亿以上；
- 2004，魏德涅夫斯基的分布式计算系统所计算出的零点总数逼近一万亿，不久两位法国人完成了对10万亿个零点的计算。

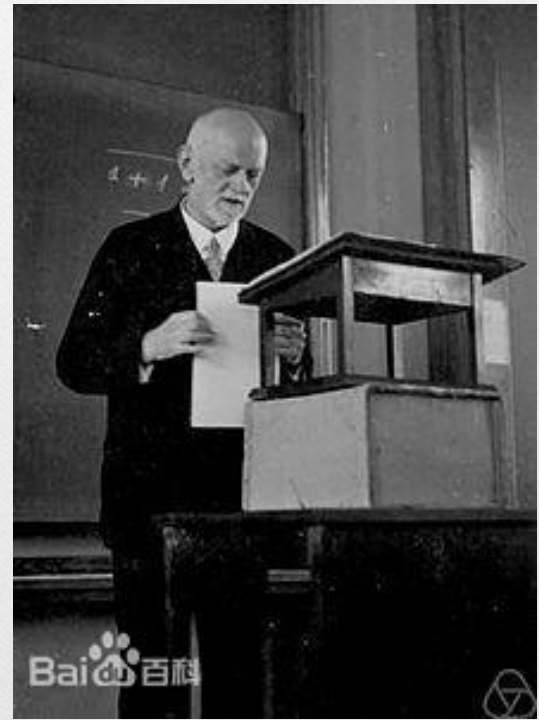


- 哈代与孪生素数猜想

孪生素数猜想: 存在无穷多个素数 p , 使得 $p + 2$ 是素数。

素数对 $(p, p + 2)$ 称为孪生素数, 例如 3和5, 5和7, 11和13…。这个猜想1849年由法国数学家波林那克 (A. Polignac) 提出。正式由希尔伯特在1900年国际数学家大会的报告上第8个问题中提出。

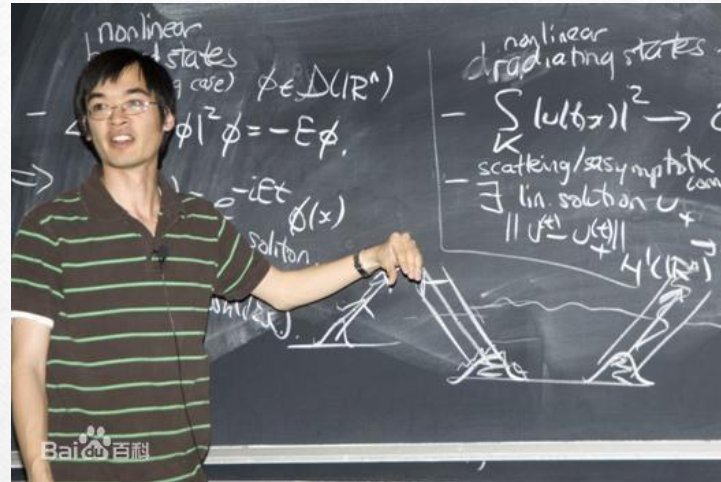
目前发现的最大的孪生素数是
 $3, 756, 801, 695, 685 \times 2^{666, 669} - 1$ 和
 $3, 756, 801, 695, 685 \times 2^{666, 669} + 1$



- 1849年，法国数学家阿尔方·波利尼亚克提出了“波利尼亚克猜想”：对所有自然数 k ，存在无穷多个素数对 $(p, p+2k)$ 。 k 等于1时就是孪生素数猜想
- 1921年，哈代和李特尔伍德提出一个与波利尼亚克猜想类似的猜想，通常称为“哈代-李特尔伍德猜想”。这一猜想不仅提出孪生素数有无穷多对，而且还给出其渐近分布形式。
- 1966年，陈景润利用筛法证明：存在无穷多个素数 p ，使得 $p+2$ 要么是素数，要么是两个素数的乘积。
- 2013年4月，新罕布什尔大学张益唐在孪生素数研究取得突破性进展，证明了孪生素数猜想的一个弱化形式，发现存在无穷多个之差小于7000万的素数对，这是第一次证明存在无穷多组间距小于定值的素数从而在孪生素数猜想这个重要问题的道路上前进了一大步。

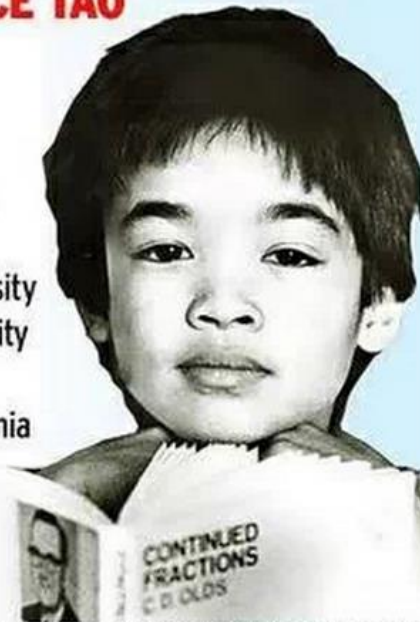


2004年，陶哲轩和英国数学家格林证明了存在任意长的素数等差数列。截至2014年10月9日，素数对之差被缩小为246。



LIFE AND TIMES OF TERENCE TAO

- **Age 7:** Begins high school
- **9:** Begins university
- **10,11,12:** Competes in the International Mathematical Olympiads winning bronze, silver and gold medals
- **16:** Honours degree from Flinders University
- **17:** Masters degree from Flinders University
- **21:** PhD from Princeton University
- **24:** Professorship at University of California in Los Angeles
- **31:** Fields Medal, the mathematical equivalent of a Nobel prize



天才出于勤奋！

- 高尔基

謝謝！
