第七章 参数估计

§7.1 参数的点估计

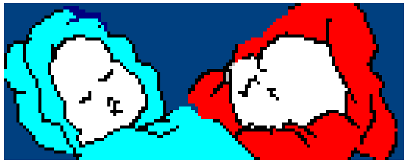
- 点估计概念
- 求估计量的方法
- 课堂练习
- 小结 布置作业

参数估计

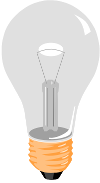
现在我们来介绍一类重要的统计推断问题

参数估计问题是利用从总体抽样得到的信息来估计总体的某些参数或者参数的某些函数.

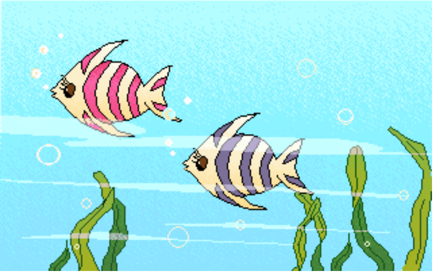
估计新生儿的体重



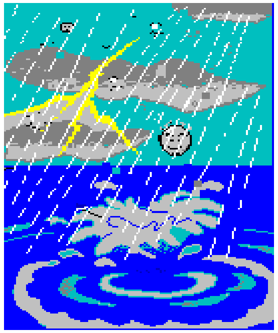
估计废品率



估计湖中鱼数



估计降雨量



…

…

在参数估计问题中，假定总体分布形式已知，未知的仅仅是一个或几个参数.

参数估计问题的一般提法

设有一个统计总体，总体的分布函数为 F(x,θ)，其中θ为未知参数 (θ 可以是向量) .

现从该总体抽样，得样本

$$X_1,X_2,\ldots,X_n$$

要依据该样本对参数 θ 作出估计, 或估计 θ 的某个已知函数 $g(\theta)$.

这类问题称为参数估计 $\begin{cases} \text{点估计} \\ \text{区间估计} \end{cases}$

例如我们要估计某队男生的平均身高.

（假定身高服从正态分布 $N(\mu, 0.1^2)$）

现从该总体选取容量为5的样本，我们的任务是要根据选出的样本（5个数）求出总体均值μ的估计. 而全部信息就由这5个数组成 .

设这5个数是:

1.65 1.67 1.68 1.78 1.69

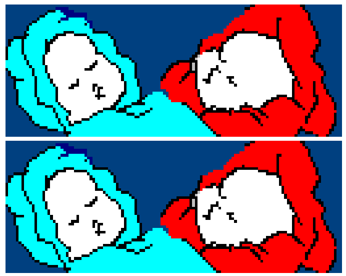
估计 μ 为1.68，这是点估计.

估计μ 在区间 [1.57, 1.84] 内，这是区间估计.

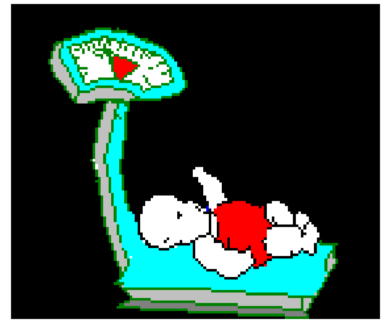
一、点估计概念

例1 已知某地区新生婴儿的体重 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$,

$(\mu,\sigma$ 未知$)$



…



随机抽查100个婴儿，得100个体重数据

10,7,6,6.5,5,5.2, …

而全部信息就由这100个数组成.

据此, 我们应如何估计 μ 和 σ 呢 ?

为估计μ：

我们需要构造出适当的样本的函数 $T(X_1,X_2,\ldots X_n)$ ，每当有了样本，就代入该函数中算出一个值，用来作为μ的估计值．

$T(X_1,X_2,\ldots X_n)$ 称为参数μ 的点估计量，

把样本值代入$T(X_1,X_2,\ldots X_n)$ 中，得到 μ的一个点估计值．

我们知道，若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $E(X)=\mu$.

由大数定律，

样本体重的平均值

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| < \varepsilon\} = 1$$

自然想到把样本体重的平均值作为总体平均体重的一个估计.

用样本体重的均值 $\overline{X}$ 估计 μ.

类似地，用样本体重的方差 S^2 估计 σ^2.

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

二、寻求估计量的方法

1. 矩估计法

2. 极大似然法

3. 最小二乘法

4. 贝叶斯方法　　　……

这里我们主要介绍前面两种方法 .

1. 矩估计法

矩估计法是英国统计学家**K.皮尔逊**最早提出来的．由辛钦定理，

若总体 X 的数学期望 $E(X)=\mu$ 有限, 则有

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} E(X)=\mu$$

$$\Downarrow$$

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \xrightarrow{P} E(X^k)=\mu_k \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$g(A_1,A_2,\cdots,A_k) \xrightarrow{P} g(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)$$

其中 g 为连续函数．

这表明，当样本容量很大时，在统计上，可以用用样本矩去估计总体矩．这一事实导出矩估计法.

定义　用样本原点矩估计相应的总体原点矩，又用样本原点矩的连续函数估计相应的总体原点矩的连续函数, 这种参数点估计法称为矩估计法．

理论依据：大数定律

设总体的分布函数中含有k个未知参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$。

矩估计法的具体做法如下

1) 计算总体分布的前k阶矩

$$E(X^i)=\mu_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k),i=1,2,\cdots,k.$$

2）列方程组

$$\begin{cases} A_1 = \mu_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \\ A_2 = \mu_2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \\ \qquad\vdots \\ A_k = \mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \end{cases}$$

即可得诸 θ_j 的矩估计量：

$$\hat{\theta}_j = \theta_j(A_1,A_2,\cdots,A_k) \quad j=1,2,\ldots,k$$

矩估计量的观察值称为矩估计值．

例2 设总体 X 的均值 μ 和方差 $\sigma^2(>0)$ 都存在，μ,σ^2 未知．$X_1,\ldots,X_n$ 是来自 X 的样本，试求 μ,σ^2 的矩估计量．

解 $$E(X)=\mu$$

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2$$

解得 $\mu = E(X)$

总体矩

$$\sigma^2 = E(X^2) - E^2(X)$$

于是 μ, σ^2 的矩估计量为

$$\hat{\mu} = A_1 = \bar{X}$$

样本矩

$$\widehat{\sigma^2} = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

练习： 设总体 X 在 $[a,b]$ 上服从均匀分布，a,b 未知．$X_1,\ldots,X_n$ 是来自 X 的样本，试求 a,b 的矩估计量．

解 $\mu_1 = E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

$$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4}$$

即
$$\begin{cases} a+b=2\mu_1 \\ b-a=\sqrt{12(\mu_2-\mu_1^2)} \end{cases}$$

解得
$$a=\mu_1-\sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)}$$
$$b=\mu_1+\sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)}$$

总体矩

于是 a , b 的矩估计量为

$$\hat{a}=\bar{X}-\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}, \quad \hat{b}=\bar{X}+\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

样本矩

矩法的优点是简单易行,并不需要事先知道总体是什么分布.

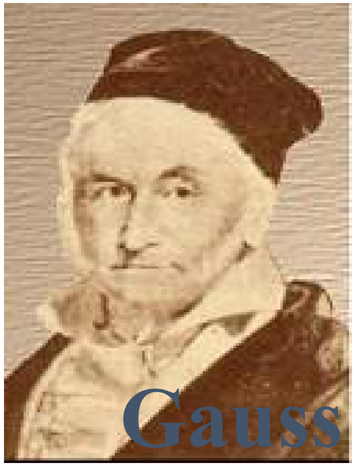
缺点是，当总体类型已知时，没有充分利用分布提供的信息.

一般场合下,矩估计量不具有唯一性.其主要原因在于建立矩法方程时，选取哪些总体矩用相应样本矩代替带有一定的随意性.

2. 最大似然法(maximum likelihood method)

它是在总体类型已知条件下使用的一种参数估计方法．

它首先是由德国数学家高斯在1821年提出的．然而,这个方法常归功于英国统计学家费歇．

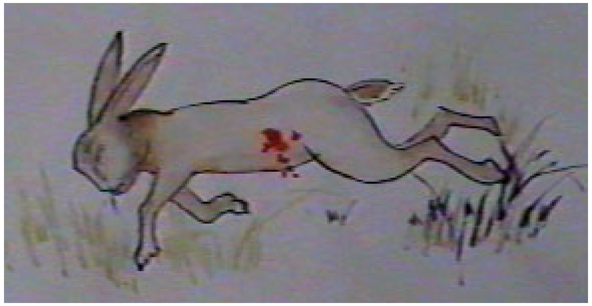


费歇在1922年重新发现了这一方法，并首先研究了这种方法的一些性质．

最大似然法的基本思想

先看一个简单例子：

某位同学与一位猎人一起外出打猎．一只野兔从前方窜过．只听一声枪响，野兔应声倒下．如果要你推测，是谁打中的呢？你会如何想呢？



你就会想，只发一枪便打中, 猎人命中的概率一般大于这位同学命中的概率 . 看来这一枪是猎人射中的 .

这个例子所作的推断已经体现了极大似然法的基本思想：结果是在使它出现可能性最大的那个原因下发生的。

极大似然估计法

从样本值出发以使观察结果出现概率最大的值作为参数的估计值。

如何度量样本值出现的可能性?

设总体X的分布律: $P\{X=x\}=p(x;\theta),\theta\in\Theta$

其中，θ是待估参数，Θ是θ的可能取值范围

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是总体X的一个样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$为样本值。

则样本值出现的概率为:

$$P\{(X_1,X_2,\cdots,X_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$$

$$=P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}$$

$$=P\{X_1=x_1\}P\{X_2=x_2\}\cdots P\{X_n=x_n\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)\overset{\Delta}{=}L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$$

如何度量样本值出现的可能性?

对于连续型总体X，设其概率密度为: $f(x;\theta),\theta\in\Theta$

其中，θ是待估参数，Θ是θ的可能取值范围

设$X_1, X_2, \dots, X_n$是总体X的一个样本， $x_1, x_2, \dots, x_n$为样本值。

则样本值出现的概率为:

$$P\{X_1=x_1, X_2=x_2, \cdots, X_n=x_n\}$$

$$\approx P\{(X_1, X_2, \cdots, X_n)\in U(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$$

$$\approx \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)dx_i$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \overset{\Delta}{=} L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\theta)$$

设$X_1,X_2,\ldots X_n$是取自总体X的一个样本，样本的联合密度(连续型）或联合分布律（离散型)为$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)$.

当给定样本$X_1,X_2,\ldots X_n$时，定义似然函数为:

$$\boxed{L(\theta)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)}$$

这里 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 是样本的观察值.

似然函数：

$$\boxed{L(\theta)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)}$$

$L(\theta)$看作参数θ的函数，它可作为θ将以多大可能产生样本值$x_1,x_2,\ldots,x_n$的一种度量．

最大似然估计法就是用使$L(\theta)$达到最大值的$\hat{\theta}$去估计θ.

$$L(\hat{\theta})=\max_{\theta} L(\theta)$$

称$\hat{\theta}$为θ的最大似然估计值．而相应的统计量$\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$称为$\theta$的最大似然估计量．

(maximum likelihood estimator)

两点说明：

1、求似然函数$L(\theta)$的最大值点，可以应用微积分中的技巧。由于ln(x)是 x 的增函数，$\ln L(\theta)$与$L(\theta)$在 θ 的同一值处达到它的最大值，假定θ是一实数，且$\ln L(\theta)$是θ的一个可微函数。通过求解方程：

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$$

可以得到 θ 的MLE . (maximum likelihood estimate) .

若θ是向量，上述方程必须用方程组代替 .

2、用上述求导方法求参数的MLE有时行不通，这时要用最大似然原则来求 .

下面举例说明如何求最大似然估计

例4 设$X_1,X_2,\ldots X_n$是取自总体 $X\sim B(1,p)$ 的一个样本，求参数p的最大似然估计量.

解：似然函数为:

$$L(p)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n;p)$$

$$X_i\sim\begin{Bmatrix}0 & 1\\ 1-p & p\end{Bmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

对数似然函数为:

$$\ln L(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(p) + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i) \ln(1-p)$$

对p求导并令其为0，

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{1-p}\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=0$$

得 $$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

即为 p 的最大似然估计值 .

从而 p 的最大似然估计量为

$$\hat{p}(X_1,\ldots,X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$$

练习：

某公司出售某款手机，需要知道它的平均使用寿命。设该款手机寿命 X 服从参数 θ 的指数分布。现在对7只该款手机的使用寿命进行跟踪调查，得到的数据如下：

手机编号	1	2	3	4	5	6	7
寿命(年)	3	1.5	2	3.5	2.5	2	3

求：未知参数 θ 的极大似然估计。

解：设手机寿命为X，则X的密度函数：

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\quad \theta>0\ (\theta\text{未知}),$$

1) 似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}$

2) 取对数：$\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$

3) 求导数：$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i\overset{\text{令}}{=}0$，解得：$\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

极大似然估计量：$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

代入样本值得极大似然估计值：$\hat{\theta}=2.5$

手机编号	1	2	3	4	5	6	7
寿命(年)	3	1.5	2	3.5	2.5	2	3

设总体的分布函数中含有k个未知参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$。

矩估计法的具体做法如下

1) 计算总体分布的前k阶矩

$$E(X^i)=\mu_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k),i=1,2,\cdots,k.$$

2）列方程组

$$\begin{cases} A_1=\mu_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \\ A_2=\mu_2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \\ \qquad\vdots \\ A_k=\mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \end{cases}$$

$j=1,2,\ldots,k$

即可得诸 θ_j 的矩估计量： $\hat{\theta}_j=\theta_j(A_1,A_2,\cdots,A_k)$

求最大似然估计(MLE)的一般步骤是:

(1) 由总体分布导出样本的联合分布律(或联合密度);

(2) 把样本联合分布律 (或联合密度) 中自变量看成已知常数,而把参数 θ 看作自变量,得到似然函数$L(\theta)$;

(3) 求似然函数$L(\theta)$ 的最大值点(常常转化为求$\ln L(\theta)$的最大值点) , 即 θ 的MLE;

(4) 在最大值点的表达式中, 用样本值代入就得参数的最大似然估计值 .

例5 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 未知．$x_1,\ldots,x_n$ 是来自 X 的样本值，试求 μ,σ^2 的最大似然估计量．

解 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=(2\pi)^{-n/2}(\sigma^2)^{-n/2}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2]$$

于是

$$LnL=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

令 $$\frac{\partial}{\partial\mu}LnL=\frac{1}{\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}LnL=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$$

解得 $$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

μ, σ^2 的最大似然估计量为

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

例6 设$X_1,X_2,\ldots X_n$是取自总体X的一个样本

$$X \sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta}, & x\geq\mu\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ θ,μ为未知参数

其中$\theta>0$,求θ,μ的最大似然估计.

解：似然函数为

$$L(\theta,\mu)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\theta}e^{-(x_i-\mu)/\theta}, & x_i\geq\mu\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ $i=1,2,\ldots,n$

解：似然函数为

$$L(\theta,\mu)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-(x_i-\mu)/\theta}, & x_i\ge\mu \\ 0, & 其它\end{cases} \qquad i=1,2,\ldots,n$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}, & \min x_i\ge\mu \\ 0, & 其它\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta,\mu)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

对数似

ln

用求导方法无法最终确定 θ、μ，
用最大似然原则来求 .

对 θ, μ 分别求偏导并令其为0,

$$\frac{\partial \ln L(\theta,\mu)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta,\mu)}{\partial \mu} = \frac{n}{\theta} > 0 \qquad (2)$$

由(1)得 $\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu$

$$L(\theta,\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}, & \min x_i \ge \mu \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对 $\boldsymbol{\mu} \le \min \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{L(\theta,\mu)} > 0$, 且是$\boldsymbol{\mu}$的增函数

$\boldsymbol{\mu}$ 取其它值时，$\boldsymbol{L(\theta,\mu)} = 0.$

故使$\boldsymbol{L(\theta,\mu)}$达到最大的$\boldsymbol{\mu}$, 即 $\boldsymbol{\mu}$的**MLE**是

$$\boldsymbol{\mu}^* = \min_{1\le i\le n} \boldsymbol{x}_i$$

于是 $$\boldsymbol{\theta}^* = \frac{1}{\boldsymbol{n}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}^*$$

即 $\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\mu}^*$为 $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}$的**MLE** .

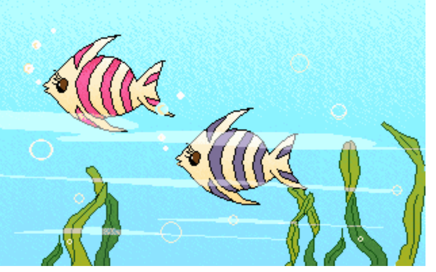
最后，我们用最大似然法估计湖中的鱼数

为了估计湖中的鱼数N，第一次捕上 r 条鱼，做上记号后放回. 隔一段时间后， 再捕出 S 条鱼，结果发现这S条鱼中有k条标有记号.根据这个信息，如何估计湖中的鱼数呢？

第二次捕出的有记号的鱼数X是$r.v$, X具有超几何分布：

$$P\{X=k\}=\frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{S-k}}{\binom{N}{S}},$$

$$0\le k\le \min(S,r)$$



$$P\{X=k\}=\binom{r}{k}\binom{N-r}{S-k}\Big/\binom{N}{S}$$

把上式右端看作 N 的函数，记作 $L(N;k)$.

应取使$L(N;k)$达到最大的N，作为N的极大似然估计.
但用对N求导的方法相当困难, 我们考虑比值:

$$\frac{P(X=k;N)}{P(X=k;N-1)}=\frac{(N-S)(N-r)}{N(N-r-S+k)}$$

经过简单的计算知，这个比值大于或小于1，

由 $N<\dfrac{Sr}{k}$ 或 $N>\dfrac{Sr}{k}$ 而定.

$$\frac{P(X=k;N)}{P(X=k;N-1)}=\frac{(N-S)(N-r)}{N(N-r-S+k)}$$

经过简单的计算知，这个比值大于或小于 1，

由 $N<\dfrac{Sr}{k}$ 或 $N>\dfrac{Sr}{k}$ 而定 .

这就是说，当N增大时，序列$P(X=k;N)$先是上升而后下降；当N为小于 $\dfrac{Sr}{k}$ 的最大整数时，达到最大值．故N的极大似然估计为 $\hat{N}=[\dfrac{Sr}{k}]$.

三、课堂练习

例1 设总体X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $\alpha>1$是未知参数 ,$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自 X 的样本,

求参数 α 的矩估计.

解 $\mu_1 = E(X) = \int_0^1 x(\alpha+1)x^{\alpha}dx$

$$= (\alpha+1)\int_0^1 x^{\alpha+1}dx = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}$$

解得 $\alpha = \dfrac{2\mu_1 - 1}{1-\mu_1}$ 总体矩

故 α 的矩估计量为 $\hat{\alpha} = \dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$ 样本矩

例 2 设$X_1,X_2,\ldots X_n$是取自总体 X 的一个样本

$$X \sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta}, & x \ge \mu \\ 0, & 其它\end{cases}$$ θ,μ为未知参数

其中$\theta>0$, 求 θ,μ 的矩估计.

解 由密度函数知

$X-\mu$ 具有均值为 θ 的指数分布

故 $\begin{cases}E(X-\mu)=\theta \\ D(X-\mu)=\theta^2\end{cases}$ 即 $\begin{cases}E(X)=\mu+\theta \\ D(X)=\theta^2\end{cases}$

也就是

$$E(X)=\mu+\theta$$

$$D(X)=\theta^2$$

解得

$$\theta=\sqrt{D(X)}$$

$$\mu=E(X)-\sqrt{D(X)}$$

于是 θ,μ 的矩估计量为

$$\begin{cases} \hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} \\ \hat{\mu}=\overline{X}-\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} \end{cases}$$

概率论

例3 设$X_1,X_2,\ldots X_n$是取自总体X的一个样本

$$X \sim f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$ 其中 $\theta > 0$,

求 θ 的最大似然估计值.

解 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\theta-1} \qquad (0 < x_i < 1) \quad 1 \le i \le n$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = n\ln\theta + (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

求导并令其为0

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$$

从中解得

$$\hat{\theta} = -n \Big/ \sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

即为θ的最大似然估计值.

四、小结

这一讲，我们介绍了参数点估计, 给出了寻求估计量最常用的矩法和极大似然法 .

参数点估计是用一个确定的值去估计未知的参数 . 看来似乎精确 ， 实际上把握不大 .

§7.2 估计量的评选标准

- 无偏性
- 有效性
- 相合性
- 小结

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

样本均值是否是 μ 的一个好的估计量?

样本方差是否是 σ^2 的一个好的估计量?

这就需要讨论以下几个问题:

(1) 我们希望一个“好的”估计量具有什么特性?

(2) 怎样决定一个估计量是否比另一个估计量“好”?

(3) 如何求得合理的估计量?

估计量的评选标准

在介绍估计量的评选标准之前，我们必须强调指出：

评价一个估计量的好坏，不能仅仅依据一次试验的结果，而必须由多次试验结果来衡量 .

这是因为估计量是样本的函数，是随机变量 . 因此，由不同的观测结果，就会求得不同的参数估计值. 因此一个好的估计，应在多次试验中体现出优良性 .

常用的几条标准是：

1．无偏性

2．有效性

3．一致性（相合性）

这里我们重点介绍前面两个标准 .

一、无偏性

估计量是随机变量，对于不同的样本值会得到不同的估计值．我们希望估计值在未知参数真值附近摆动，而它的期望值等于未知参数的真值. 这就导致无偏性这个标准．

设 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 是未知参数 θ 的估计量，若

$$E(\hat{\theta})=\theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计．

无偏性是对估计量的一个常见而重要的要求.

无偏性的实际意义是指没有系统性的偏差.

例如，用样本均值作为总体均值的估计时，虽无法说明一次估计所产生的偏差，但这种偏差随机地在0的周围波动，对同一统计问题大量重复使用不会产生系统偏差.

例1： 设总体 X的数学期望 $E(X)=\mu$, $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自X的一个样本，证明：$Z=\sum_{i=1}^{n}c_iX_i$ 为 μ 的无偏估计，其中，$c_i\neq\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n}c_i=1$。

证 因为

$$E(Z)=E\left(\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}c_iE(X_i)=\mu\sum_{i=1}^{n}c_i=\mu,$$

故 Z 是μ 的无偏估计.

一个参数往往有不止一个无偏估计, 若 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是参数θ 的无偏估计量,我们可以比较 $E(\hat{\theta}_1-\theta)^2$ 和 $E(\hat{\theta}_2-\theta)^2$ 的大小来决定二者谁更优 .

由于

$$D(\hat{\theta}_1)=E(\hat{\theta}_1-\theta)^2$$

$$D(\hat{\theta}_2)=E(\hat{\theta}_2-\theta)^2$$

所以无偏估计以方差小者为好, 这就引进了有效性这一概念 .

二、有效性

设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$

都是参数θ 的无偏估计量，若对任意 $\theta\in\Theta$，

$$D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$$

且至少对于某个 $\theta\in\Theta$上式中的不等号成立，

则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

例1（续）

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体X的一个样本，$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，

$Z=\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ 为 μ 的无偏估计， $c_i \neq \frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n} c_i =1$。

求c_i满足什么条件， 无偏估计Z最有效。

$$D(Z)=D\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} c^2{}_i E(X_i)=\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i{}^2$$

当$c_1=c_2=\ldots=c_n=\frac{1}{n}$时，$D(Z)$最小

三、一致性（相合性）

设 $\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$ 是参数 θ 的估计量，若对于任意 $\theta\in\Theta$，当 $n\to\infty$ 时 $\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$ 依概率收敛于 θ，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致（相合）估计量.

$\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计量

$\Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1,\ \theta\in\Theta$$

由辛钦定理

若总体 X 的数学期望 $E(X)=\mu$ 有限, 则有

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \xrightarrow{P} E(X^k)=\mu_k \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$g(A_1,A_2,\cdots,A_k) \xrightarrow{P} g(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)$$

其中 g 为连续函数 .

故

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$ 为 $E(X^k) = \mu_k \ (k = 1, 2, \cdots)$ 的相合估计量.

若 g 为连续函数, 则有

$g(A_1, A_2, \cdots, A_k)$ 为 $g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$ 的相合估计量.

四、小结

对于一个未知参数可以提出不同的估计量，因此自然提出比较估计量的好坏的问题，这就需要给出评定估计量好坏的标准.

在本节中,介绍了评定估计量好坏的三个标准:无偏性、有效性、和相合性.

§7.3　区间估计

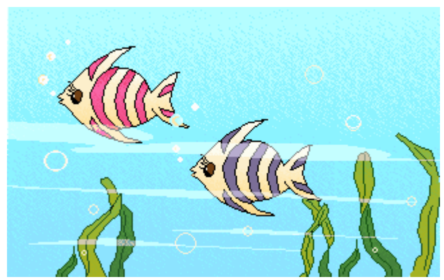
- 置信区间定义
- 置信区间的求法
- 两个正态总体参数的区间估计

引言

前面，我们讨论了参数点估计．它是用样本算得的一个值去估计未知参数．但是，点估计值仅仅是未知参数的一个近似值，它没有反映出这个近似值的误差范围，使用起来把握不大．区间估计正好弥补了点估计的这个缺陷．

譬如，在估计湖中鱼数的问题中，若我们根据一个实际样本，得到鱼数 N 的极大似然估计为1000条.

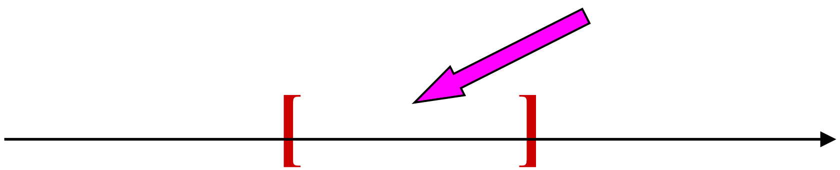
实际上，N的真值可能大于1000条，也可能小于1000条.

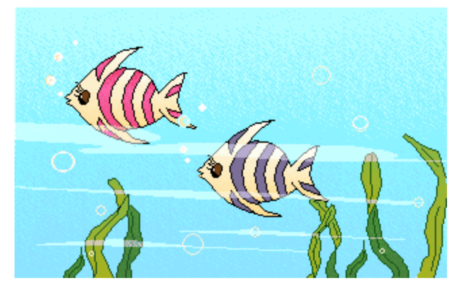


若我们能给出一个区间，在此区间内我们合理地相信 N 的真值位于其中. 这样对鱼数的估计就有把握多了.

也就是说，我们希望确定一个区间，使我们能以比较高的**可靠程度**相信它包含真参数值.

湖中鱼数的真值





这里所说的“**可靠程度**”是用概率来度量的，称为**置信度**或**置信水平**.

习惯上把置信水平记作 $1-\alpha$ ，这里 α 是一个很小的正数.

置信水平的大小是根据实际需要选定的.

例如，通常可取置信水平 $1-\alpha$=0.95或0.9等.

根据一个实际样本，由给定的置信水平，我们求出一个尽可能小的区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ ，使

$$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$$

称区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

一、 置信区间定义

设 θ 是一个待估参数，给定 $\alpha > 0$，若由样本 $X_1, X_2, \ldots X_n$ 确定的两个统计量

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

$$\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \qquad (\underline{\theta} < \overline{\theta})$$

满足

$$P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} = 1 - \alpha$$

则称区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 是 θ 的置信水平（置信度）为 $1-\alpha$ 的置信区间.

$\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为置信下限和置信上限.

可见，

对参数θ作区间估计，就是要设法找出两个只依赖于样本的界限(构造统计量).

$$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

$$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

$$(\underline{\theta}<\overline{\theta})$$

一旦有了样本，就把 θ 估计在区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 内．

这里有两个要求:

1. 要求 θ 以很大的可能被包含在区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$内，就是说，概率 $P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}$ 要尽可能大．即要求估计尽量可靠.

2. 估计的精度要尽可能的高．如要求区间长度 $\overline{\theta}-\underline{\theta}$ 尽可能短，或能体现该要求的其它准则.

可靠度与精度是一对矛盾，一般是在保证可靠度的条件下尽可能提高精度.

二、置信区间的求法

在求置信区间时，要查表求分位点.

定义　设 $0<\alpha<1$，对随机变量X，称满足

$$\boxed{P(X>x_\alpha)=\alpha} \Leftrightarrow P(X\le x_\alpha)=1-\alpha$$

的点 x_α 为X的概率分布的上 α 分位点.

$$P(a<X<b)=1-\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$P(X<b)-P(X<a)=1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$P(X<b)=1-\alpha/2,\ P(X<a)=\alpha/2$$

若 X 为连续型随机变量，则有

$$a = x_{1-\alpha/2}, \quad b = x_{\alpha/2}.$$

所求置信区间为 $(x_{1-\alpha/2}, x_{\alpha/2})$

$$P(a < X < b) = 1 - \alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$P(X < b) - P(X < a) = 1 - \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$P(X < b) = 1 - \alpha/3, P(X < a) = 2\alpha/3$$

$$a = x_{1-2\alpha/3}, \quad b = x_{\alpha/3}.$$

所求置信区间为 $(x_{1-2\alpha/3}, x_{\alpha/3})$

例1 设$X_1,\ldots X_n$是取自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，σ^2已知，求参数μ 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间.

明确问题,是求什么参数的置信区间？置信水平是多少？

解 选 的点估计为 $\overline{X}$ ，

寻找未知参数的一个良好估计.

取 $$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

寻找一个待估参数和统计量的函数，要求其分布为已知.

有了分布，就可以求出U取值于任意区间的概率.

对于给定的置信水平，根据U的分布，确定一个区间，使得U取值于该区间的概率为置信水平.

对给定的置信水平 $1-\alpha$,

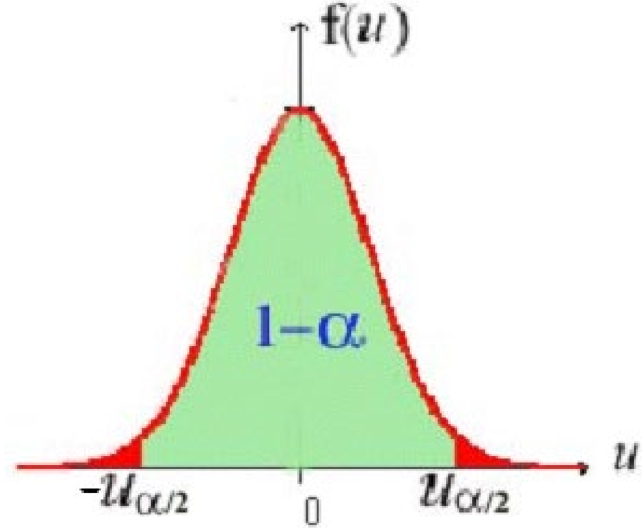
查正态分布表得 $u_{\alpha/2}$,

使 $$P\{|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}|\le u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

对给定的置信水平 $1-\alpha$,

查正态分布表得 $u_{\alpha/2}$, 使

$$P\{|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}|\le u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$



从中解得

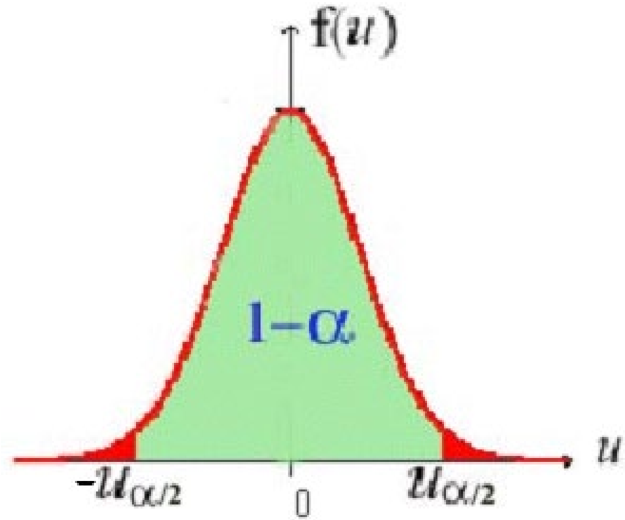
$$P\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\le\mu\le\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

$$P\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\le\mu\le\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\}$$

$$=1-\alpha$$

于是所求μ 的 置信区间为

$$[\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}]$$



也可简记为

$$(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2})$$

从例1解题的过程，我们归纳出求置信区间的一般步骤如下:

1. 明确问题，是求什么参数的置信区间?置信水平$1-\alpha$是多少?

2. 寻找参数θ的一个良好的点估计

$$T(X_1,X_2,\ldots X_n)$$

3. 寻找一个待估参数θ和估计量T的函数$U(T,\theta)$,且其分布为已知.

4. 对于给定的置信水平$1-\alpha$，根据$U(T,\theta)$的分布，确定常数a, b，使得

$$P(a<U(T,\theta)<b)=1-\alpha$$

5. 对"$a<U(T,\theta)<b$"作等价变形,得到如下形式:

$$\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}$$

即

$$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$$

于是$(\underline{\theta},\overline{\theta})$就是$\theta$的$100(1-\alpha)\%$的置信区间.

可见，确定区间估计很关键的是要寻找一个待估参数θ 和估计量T的函数$U(T,\theta)$, 且$U(T,\theta)$的分布为已知, 不依赖于任何未知参数 .

而这与总体分布有关，所以，总体分布的形式是否已知，是怎样的类型，至关重要.

需要指出的是，给定样本，给定置信水平，置信区间也不是唯一的.

对同一个参数，我们可以构造许多置信区间.

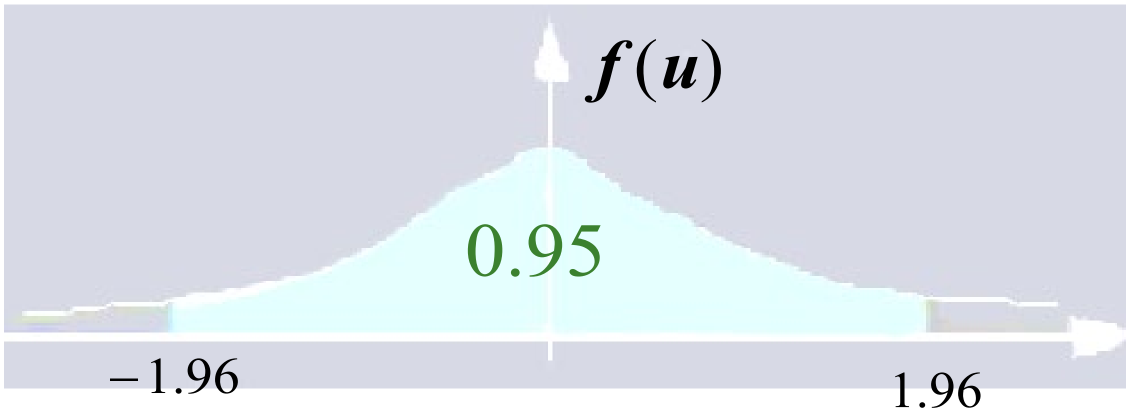
例如,设 $X_1, \dots, X_n$ 是取自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，σ^2已知,求参数μ 的置信水平为 $1-\alpha=0.95$ 的置信区间.

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

由标准正态分布表，对任意a、b，我们可以求得 $P(a<U<b)$.

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

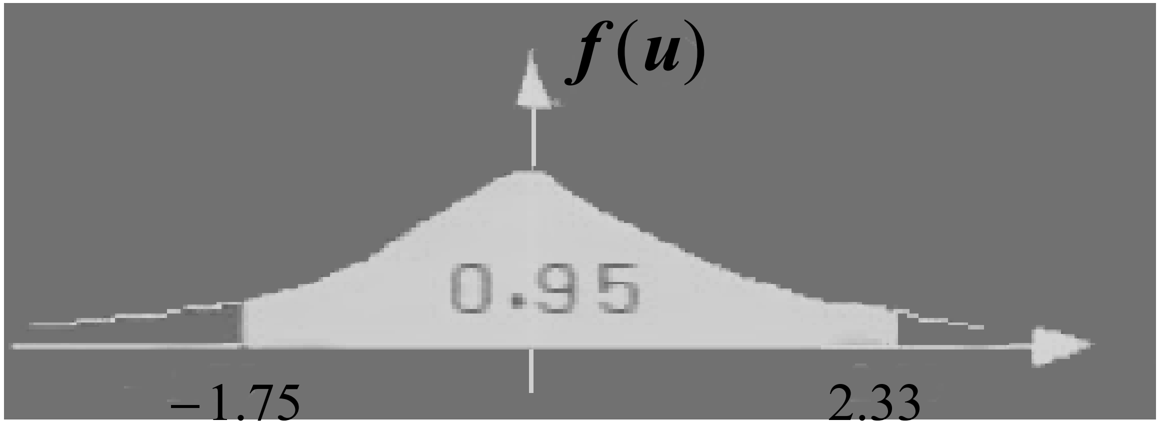
例如，由 $P(-1.96\le U\le 1.96)=0.95$



我们得到均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha=0.95$ 的置信区间为

$$\left[\overline{X}-1.96\sigma/\sqrt{n},\ \overline{X}+1.96\sigma/\sqrt{n}\right]$$

由 $P(-1.75 \le U \le 2.33) = 0.95$



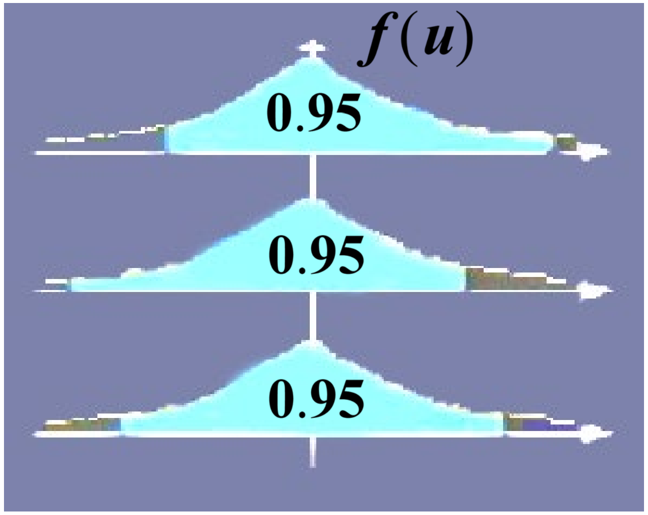
我们得到均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha = 0.95$ 的置信区间为

$$[\bar{X} - 1.75\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + 2.33\sigma/\sqrt{n}]$$

这个区间比前面一个要长一些.

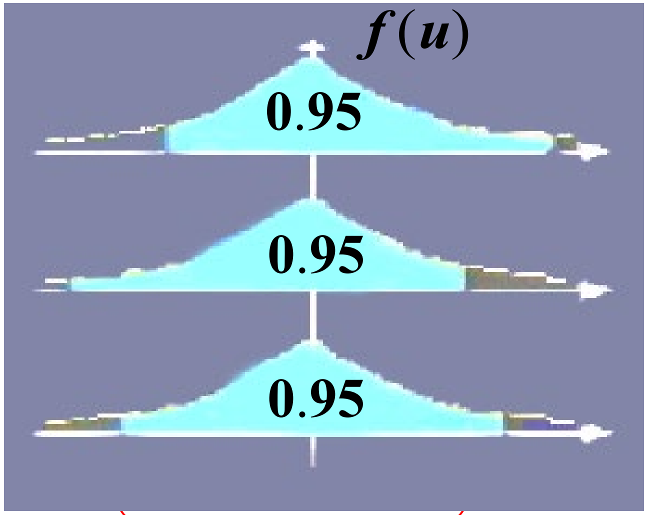
类似地，我们可得到若干个不同的置信区间.

任意两个数a和b，只要它们的纵标包含$f(u)$下95%的面积，就确定一个95%的置信区间.



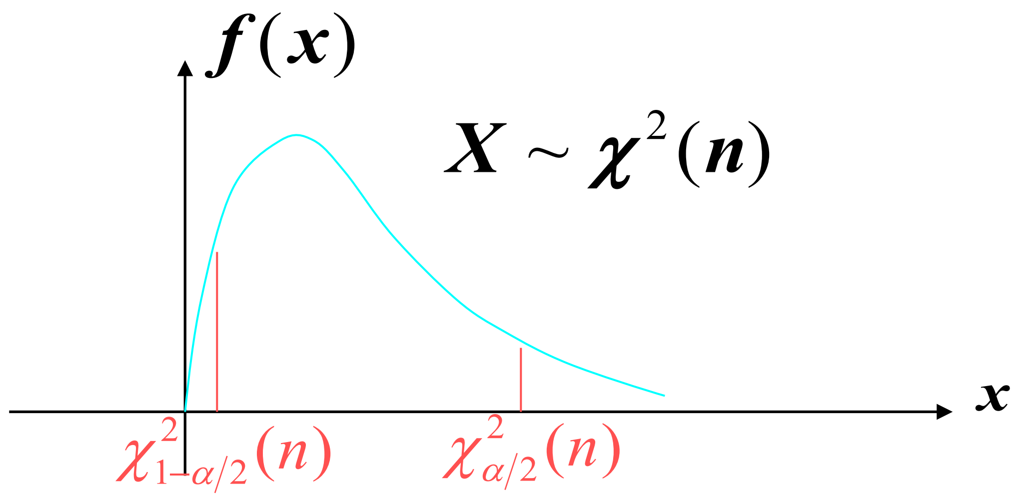
我们总是希望置信区间尽可能短.

在概率密度为单峰且对称的情形，当$a=-b$时求得的置信区间的长度为最短.



$a=-b$

即使在概率密度不对称的情形，如 χ^2分布，*F*分布，习惯上仍取对称的分位点来计算未知参数的置信区间.



我们可以得到未知参数的的任何置信水平小于 1 的置信区间，并且置信水平越高，相应的置信区间平均长度越长.

也就是说，要想得到的区间估计可靠度高，区间长度就长，估计的精度就差. 这是一对矛盾.

实用中应在保证足够可靠的前提下，尽量使得区间的长度短一些 .

总结：求未知参数θ在置信水平下1-α的置信区间$[\underline{\theta},\overline{\theta}]$，

$$P\{\underline{\theta}\le\theta\le\overline{\theta}\}=1-\alpha.$$

总体：X

样本：$X_1,X_2,\ldots,X_n$ （已知信息）

1.找到θ的一个好的估计量$\hat{\theta}=\theta(X_1,X_2,\ldots,X_n)$.

2.构造关于θ和估计量$\hat{\theta}$的函数$\mathrm{U}=U(\theta,\hat{\theta})$,并且U的分布信息已知

3.根据U的分布，确定常数a和b使得 $\mathrm{P}\{\mathrm{a}\le U\le b\}=1-\alpha$.

（注意：a和b不唯一）

4.根据U的取值范围解出θ的置信区间。

三、正态总体均值与方差的区间估计

- 单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$的情况
- 两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

点估计：单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情形

$$\mu\text{的点估计}\begin{cases}\sigma^2\text{已知}, \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \\[2ex] \sigma^2\text{未知}, \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)\end{cases}$$

$$\sigma^2\text{的点估计}, \begin{cases}\mu\text{已知}, \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n) \\[2ex] \mu\text{未知}, \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)\end{cases}$$

一、单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情况

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,并设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自总体的样本，$\bar{X},S^2$ 分别为样本均值和样本方差．

1. 均值 μ 的置信区间

1° σ^2 为已知

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

可得到 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)\text{或}\left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$$

2° σ^2 为未知

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

此分布不依赖于任何未知参数

由

$$P\{|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}| < t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

可得到 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$$

或

$$(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$$

例1 有一大批糖果.现从中随机地取 16 袋，称得重量(以克计)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布,试求总体均值 μ 的置信水平0.95为的置信区间.

解 这里 $1-\alpha=0.95, \alpha/2=0.025, n-1=15,$

$t_{0.025}(15)=2.1315.$

$$\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=503.75,$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}=6.2022.$$

于是得到μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

即 $(500.4, 507.1)$

2. 方差 σ^2 的置信区间(μ已知)

由

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$$

$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n)\} = 1-\alpha$$

可得到 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$$

2.方差 σ^2 的置信区间(μ未知)

由

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

可得到 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

由

$$P\{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < \frac{\sqrt{(n-1)}S}{\sigma} < \sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\} = 1-\alpha$$

可得到标准差 σ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$

例2 有一大批糖果.现从中随机地取 16 袋，称得重量(以克计)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布,试求总体标准差 σ 的置信水平0.95为的置信区间.

解 这里 $\alpha/2 = 0.025, 1-\alpha/2 = 0.975, n-1 = 15,$

$$\chi^2_{0.025}(15) = 27.488, \quad \chi^2_{0.975}(15) = 6.262.$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i - \overline{x})^2} = 6.2022.$$

于是得到 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$

即 $(4.58, 9.60).$

二、课堂练习

1. 随机地取炮弹 10 发做试验，得炮口速度的标准差 $s = 11(m/s)$，炮口速度服从正态分布. 求这种炮弹的炮口速度的标准差 σ 的置信水平为0.95的置信区间.

解
$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

由
$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

可得到σ^2的置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

这里 $\alpha/2 = 0.025, 1-\alpha/2 = 0.975, n-1 = 9,$

$\chi^2_{0.025}(9) = 19.023, \ \chi^2_{0.975}(9) = 2.700, \ s = 11.$

于是得到 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$

2. 某单位要估计平均每天职工的总医疗费，观察了30天,其总金额的平均值是170元,标准差为30元，试决定职工每天总医疗费用平均值的区间估计（置信水平为0.95）.

解　设每天职工的总医疗费为X，则有

$$E(X)=\mu \ ,D(X)=\sigma^2$$

σ^2未知　　选择$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$ 服从*t(n-1)* 分布

使 $$P\{|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}|\le t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$$

得均值μ 的置信水平为$1-\alpha$ 的区间估计为

$$[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)]$$

将$\bar{X}=170$， $S=30$， $t_{0.025}(29)=2.0452$代入

$$[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{30}}t_{0.025}(29), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{30}}t_{0.025}(29)]$$

得μ的置信水平为0. 95的置信区间为

$$[158.8, 181.2]$$

得均值 μ 的置信水平为 0.95 的区间估计为

$$[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{30}}t_{0.025}(29), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{30}}t_{0.025}(29)]$$

另解 某单位要估计平均每天职工的总医疗费，观察了30天,其总金额的平均值是170元,标准差为30元，试决定职工每天总医疗费用平均值的区间估计（置信水平为0.95）.

解 设每天职工的总医疗费为X，则有

$$E(X)=\mu\ ,D(X)=\sigma^2$$

由中心极限定理，

$\overline{X}$ 近似服从正态分布 $N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$

σ 未知，用样本标准差S近似代替.

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$ 近似 $N(0,1)$ 分布

使 $$P\{|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}|\le u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

得均值μ 的置信水平为$1-\alpha$ 的区间估计为

$$[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}]$$

将 $\overline{X}$ =170,S=30, $u_{\alpha/2}$ =1.96,n=30代入得,

μ 的置信水平为0.95的置信区间是

[159.27, 180.74]

得均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的区间估计为

$$[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}]$$

三、小结

我们介绍了区间估计、单个正态总体均值、方差的置信区间.

同学们可通过练习，掌握各种求未知参数的置信区间的具体方法.