金融数学（引论）

吴岚　　黄海编著　北京大学出版社

年金

主讲人：韦才敏

工南410
电话：86503745(O),679299(M)
Email：cmwei@stu.edu.cn
时间：2022年9月

年金 (annuity) —— 指以相等的时间间隔进行的一系列收付款行为,也指以固定的时间周期以相对固定的方式发生的现金流,例如投保、领保、房贷等

注：本书涉及的年金均默认为确定年金(annuity-certain)，即无条件确定发生的年金

- 年金现金流是许多复杂现金流的基础，是利率计算的最直接的一种应用
- 年金的计算问题主要包括年金的现值和终值计算两大类

付款期 (payment period) —— 指两次年金收取之间的时间间隔

注：默认为时间间隔相等

2.1 基本年金

基本年金 —— 一种最简单的年金方式满足

1）付款时期间隔相等

2）每次付款额度相同

3）付款的频率与计息的频率相同

基本年金主要可分为期末年金和期初年金两种典型情形

期末年金(annuity-immediate) —— 年金的现金流在第一个付款期末首次发生，随后依次分期进行。

n 期标准期末年金——每次的年金金额为 1 个货币单位，现金流在第一个付款期末首次发生，共计*n* 次。

时间流程图：

记号 $a_{\overline{n}|i}$ —— 表示比较日选为 **0** 时刻的*n* 期标准期末年金的所有年金金额的现值之和，简记 “ $a_{\overline{n}|}$ ” 。

注: 记号$a_{\overline{n}|i}$ 也可以表示利率*i* 环境中的标准期末年金的现金流。

注: 记号 $a_{\overline{n}|i}$ 中 “*a* ”是年金的英文单词的第一个字母，*n* 表示年金现金流的次数，*i* 表示年金的计算利率。

计算公式为：$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^n = \dfrac{1-v^n}{i}$

基本公式:

1) $1 = ia_{\overline{n}|} + v^n$

即 :**0** 时刻一个货币单位的价值

= (0,*n*]上每次(利息)收入 *i* 的现金流价值($ia_{\overline{n}|}$)

+*n*时刻一个货币单位的现值 (v^n)

2) $1=\frac{1}{a_{\overline{n}|}}a_{\overline{n}|}$

即 :0 时刻一个货币单位的价值

= $(0,n]$上对应的n期期末年金现金流($\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$)

记号 $s_{\overline{n}|i}$ —— 表示标准期末年金的所有年金金额在年金结束时刻的终值之和,简记“ $s_{\overline{n}|}$ ”

计算公式为:

$$s_{\overline{n}|i}=(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\cdots+(1+i)+1=\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

基本公式:

1） $(1+i)^n=1+is_{\overline{n}|}$

即：0 时刻一个货币单位在n 时刻的价值

= $(0,n]$上每次(利息)收入i的现金流终值($is_{\overline{n}|}$)

\+ n时刻一个货币单位(本金)

2) $1=\frac{1}{s_{\overline{n}|}}s_{\overline{n}|}$

即： n 时刻一个货币单位的价值

$=(0,n]$上对应的n 期期末年金现金流($\frac{1}{s_{\overline{n}|}}$)

$s_{\overline{n}|}$ 与 $a_{\overline{n}|}$ 关系式

1） $s_{\overline{n}|}=a_{\overline{n}|}(1+i)^n$　　2) $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}=\frac{1}{s_{\overline{n}|}}+i$

注: $(1+i)^n$为期初到期末的累积因子

注：由 1)可得

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|}}+i=\frac{1}{a_{\overline{n}|}(1+i)^n}+i=\frac{1+(1+i)^n-1}{a_{\overline{n}|}(1+i)^n}=\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$$

例：Find the present value of an annuity which pays \$500 at the end of each half-year for 20 years if the rate of interest is 9% convertible semiannually.

解: $PV = 500a_{\overline{40|}.045} = 500 \times 18.4016 = 9200.80$

注: 年金的要求是定期支付,间隔相等,但却不一定是"年度"的。具体计算可利用年金表或直接做数值计算。

例:现有十年期50万元贷款，年利率8%,试比较以下三种还贷方式的应付利息情况:

A — 在第十年底一次付清
B — 每年底偿还当年的利息，本金最后一次付清
C — 每年底偿还固定的金额，十年还清

解: **方式 A** :在第十年底的一次还款为

$$500,000\times(1.08)^{10}=1,079,462.50$$

其中的利息为:

$$1,079,462.50-500,000=579,462.50$$

应付利息约为五十八万元

方式 B:

每年所付利息为 $500,000\times 8\%=40,000$

总的利息付出为 $40,000\times 10=400,000$

应付利息为**40**万元

方式 C:

设每年的还款额为R，价值方程

$$Ra_{\overline{10|}0.08}=500,000 \quad \Rightarrow R=\frac{500,000}{a_{\overline{10|}0.08}}=\frac{500,000}{6.710081}=74,514.54$$

10 年的付款总额为 $74,514.54\times 10=745,145.4$

其中的利息总额为 $745,145.4-500,000=245,145.4$

应付利息约为 **25** 万元

注: 虽然三种应付利息结果不同,但所有还款的现值是相同的=原始贷款额

思考:为什么方式C 的利息金额较方式A 和方式B明显的小?

期初年金(annuity-due) —— 在合同生效时立即发生首次的现金流，随后依次分期进行的年金方式

n **期标准期初年金**——每次的年金金额为 1 个货币单位，在合同生效时立即发生首次的现金流，共计*n*次

时间流程图

1	1	1	…	1	
0	1	2	…	$n-1$	n

记号 $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ ——表示标准期初年金的现值之和

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i}=1+v+v^2+\cdots+v^{n-1}=\frac{1-v^n}{d}$$

记号 $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ ——表示标准期初年金的终值之和

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i}=(1+i)+(1+i)^2+\cdots+(1+i)^n=\frac{(1+i)^n-1}{d}$$

期初年金(annuity-due)

期初年金(annuity-due) —— 在合同生效时立即发生首次的现金流，随后依次分期进行的年金方式

n 期标准期初年金——每次的年金金额为 1 个货币单位，在合同生效时立即发生首次的现金流，共计n次

时间流程图

$\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ 与 $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ 的关系式

1） $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}(1+i)^n$

2) $\dfrac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|i}} = \dfrac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|i}} + d$

注: 注意与期末年金的相应公式比较

期末年金与期初年金的关系式

1） $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)a_{\overline{n}|i}$

2） $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)s_{\overline{n}|i}$

3) $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$

4） $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|i} - 1$

注： 从现金流的角度来考虑

例：某人现在开始每年定期地投入相同的一笔钱，希望在第十二年底（下一年度定期投入的前一瞬间）得到1 百万元的回报，如果年利率为7%， 试计算每年的投入金额。

解: 设每年的投入额为R, 第十二年底的价值方程为

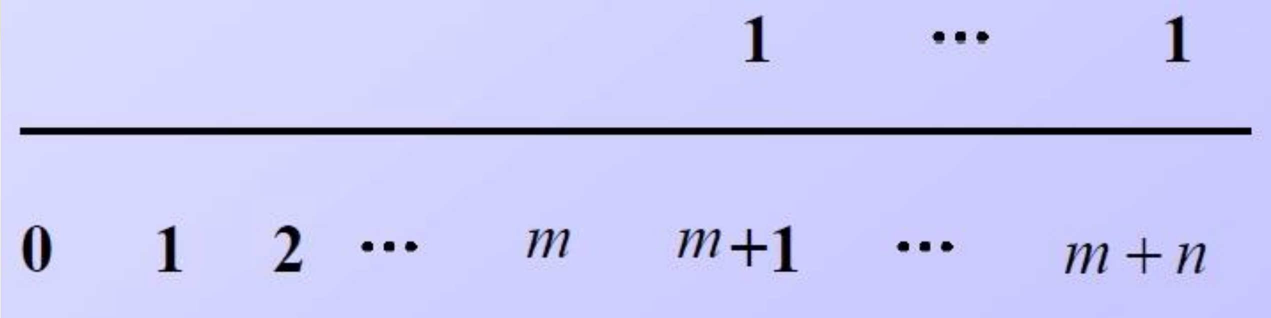
$$R\ddot{s}_{\overline{12}|0.7} = 1,000,000$$

$$\Rightarrow R = \frac{1,000,000}{\ddot{s}_{\overline{12}|0.7}} = \frac{1,000,000}{19.14064} = 522,45$$

即:每年初投入5万2千元，到12 年底总累积值为1百万元

递延年金（deferred annuity）—— 若年金的首次发生是递延了一段时间后进行的。

递延m期的递延年金时间流程图



从现金流看,该年金相当于一个$m+n$期期末年金扣除一个m期期末年金,即 $a_{\overline{n+m}|i} - a_{\overline{m}|i}$，其数值等于 $v^m a_{\overline{n}|i}$.

结论：递延年金的现值为两个定期年金的现值之差

思考：递延年金的终值是否也为两个定期年金的终值之差？

注：类似的有“递延m期的n期标准期初年金”

永久年金（perpetuity）—— 若年金的支付（现金流）永远进行下去，没有结束的日期

记号 $a_{\overline{\infty}|i}$ ——表示标准永久期末年金的现值之和，即有

$$a_{\overline{\infty}|i} = v + v^2 + \cdots = \frac{1}{i}$$

注：$\lim\limits_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1}{i}$

注：对于标准永久期初年金有 $\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \dfrac{1}{d}$

n期标准期末年金可用一个标准永久年金扣除一个递延n期的标准永久年金表示，相应流程图为：

$a_{\overline{n}\mid i}$		1	1	…	1			
$a_{\overline{\infty}\mid i}$		1	1	…	1	1	1	…
$v^n a_{\overline{\infty}\mid i}$						1	1	1 …
	0	1	2	…	n	$n+1$	$n+2$	…

例：某人留下遗产10万元。第一个十年将每年的利息付给受益人甲，第二个十年将每年的利息付给受益人乙，二十年后将每年的利息付给受益人丙且一直进行下去，均为年底支付。如果年利率为7% ，试计算三个受益人的相对受益比例。

解：甲的受益现值为：

$$100000\times 7\%\times a_{\overline{10}|0.7}=7000\times 7.0236=49162$$

乙的受益相当于七千份递延十年的十年定期标准期末年金,现值为:

$$7000(a_{\overline{20}|0.07}-a_{\overline{10}|0.07})=7000(10.5940-7.0236)=24993$$

丙的受益相当于七千份递延二十年的标准永久期末年金,现值为:

$$7000(a_{\overline{\infty}|0.07}-a_{\overline{20}|0.07})=7000(\frac{1}{0.07}-10.5940)=25842$$

结论：从而从现值的角度看，甲乙丙的受益比例近似为：**49%** 、**25%** 和 **26%**。

注:因为$100000(1.07)^{-20}=25842$,所以丙相当于在二十年后完全继承了十万元。

剩余付款期不是标准时间单位的计算

问题的提出：

现值为取整的货币量，年金值也为取整的货币量，当两者不能平衡的时候，如何对零碎的部分进行处理？

例：原始投入**500** 元，年金为**100** 元，年利率**3%**。若年金为 **5** 年期，则上述年金的现值为**457.97** 与原始投入不平衡；若年金为 **6** 年期，则上述年金的现值为**541.72**，与原始投入也不平衡。

- 解决方案一:最后一次付款额度上浮

第 5 次付款额度由原先的100 元上浮为

$$100+42.03\times(1+3\%)^5=148.72$$

- 解决方案二：最后一次付款额度扣减

$$100-41.72\times(1+3\%)^6=50.18$$

- 解决方案三：从模型的内在一致性出发，在时刻 5 与时刻6 之间再增加一次付款（额度小于100 元），使得所有付款的现值之和恰好等于500 元

思考：什么时刻付款、额度多少可以达到上述要求？

定义：对于任意的$t(0 \le t \le 1)$形式上定义下面的计算：

$$a_{\overline{n+t}|i} = \frac{1-v^{n+t}}{i} = a_{\overline{n}|i} + v^{n+t}\left[\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right]$$

上式右边的第二项表示:在时刻$n+t$的不足一个货币单位的年金金额 $\frac{(1+i)^t - 1}{i}$ 在 0 时刻的现值

注: 数学形式上的一致性

例:在上例中,设最后一次付款时间为$5+t$,则由

$$500 = 100a_{\overline{5+t}|0.03} = 100\frac{1-v^{5+t}}{0.03}, v = 0.9709$$

可解出$t \approx 0.5$

相应最后一次的付款额度应为

$$100\frac{(1+0.03)^t - 1}{0.03} = 49.63$$

例 现有十万元的投资，年利率 5%，每年底定期收回 1 万元，试问：这样的定期回报可以进行多少年?对不足 1 万元的最后一次回报部分，按以下三种情况：

分别计算回报金额：

A — 不足部分与最后一次正常回报同时收回

B — 不足部分在最后一次正常回报的下一年底收回

C — 不足部分在最后一次正常回报的下一年的某个等价时间收回

❖解 时间流程图为：

$$\begin{array}{cccccccc} & 10000 & \cdots & 10000 & 10000+X_A & X_C & X_B \\ \hline 0 & 1 & \cdots & 13 & 14 & 14+t & 15 \\ 100{,}000 & & & & & & \end{array}$$

- 计算最大的正常回报的时间n：

$$10000a_{\overline{n}|0.05} \le 100000, n \ge 1$$

- 查表可得：$a_{\overline{14}|.05} = 9.8986, a_{\overline{15}|.05} = 10.3797$
- 从而有 $n = 14$
- X_A, X_B 和 X_C 分别表示三种方式对应的不足部分的金额，则有：

$$10000s_{\overline{14}|.05} + X_A = 100000(1+5\%)^{14}$$

$$\Rightarrow X_A = 2007$$

$$10000 \times (1+5\%) s_{\overline{14}|.05} + X_B = 100000(1+5\%)^{15}$$

$$\Rightarrow X_B = 2107$$

- 在方式 **C**中,先计算 **t**:

$$10000 a_{\overline{14+t|}.05} = 1000000$$

- 即 $\dfrac{1-v^{14+t}}{i} = 10$

- 得到 $t = 0.2067$

- 进而有 $X_C = 10000 \dfrac{(1+i)^t - 1}{i} = 2027$

- 注 $X_A < X_C < X_B$

例:某人每年(年底)存入1000元,利率 8%,希望经过若干年后达到 25,000 元,若最后一次不足1000元的存款将在正常存款的一年后进行。试计算正常存款的年数和最后一次存款的金额。

解：设最后一次的存款额为X, $0 \le X < 1000$,为了实现存款目的,在存款结束时的价值方程为

$$1000 s_{\overline{n}|.08}(1+8\%) + X = 25000, n \ge 1$$

查表可得

$$S_{\overline{13}|.08} = 21.4953, S_{\overline{14}|.08} = 24.2149$$

若n =13，则可得X=1785>1000

若n =14，则可得X=-1152<0

所以，不足部分不能按题目要求的方式进行存款。

思考：对于任意给定的现值，是否总有解？

广义年金 ——付款周期与利率换算期不同的情形

分如下两步来计算广义年金：

1) 将利率调整为与付款周期相同的名利率

设对应的名利率为 $i^{(m)}$,付款周期为 p(每个计息期内付款 p次),在每个付款期内与 $i^{(m)}$ 等价的利率为$i^{(p)}/p$.

2)用新的利率依前面的方法进行计算

例：现有投资方式为：前两年每季度初投入200元,后两年每季度初投入100元；该投资的月收益率为1%。试计算四年后总的投资收益。

解：首先计算与月收益率1%等价的季收益率j

$$(1+j)^4=(1.01)^{12} \Rightarrow j=(1.01)^3-1=0.030301.$$

从而可得总的投资收益：

$$100[\ddot{s}_{\overline{16}|j}+\ddot{s}_{\overline{8}|j}(1+j)^8]=100(20.8170+9.1716)=2999$$

例：某 30万元的贷款计划分季度等量偿还，在五年内完成。如果贷款利率为半年名义利率10%，计算每次偿还的金额。

解：半年实利率为5%，等价的季度实利率为*j*

$$j=(1.05)^{2/4}-1=0.024695$$

记每次偿还额为R，则有

$$Ra_{\overline{20|}j}=300000$$

由此可得

$$R=300000/15.6342=19188.70.$$

几种典型情形的具体讨论

1）付款周期大于利息换算期

假定：付款周期（年金周期）是利率周期的整数倍

定义记号：

k ——每个付款周期内的利息换算次数

n ——年金的付款总次数× k

i ——每个利息换算期内的实利率(名利率/换算次数)

期末年金：

每个付款期末付款1元，流程图

$$\begin{array}{cccccccc} & & & 1 & & 1 & & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2\cdots & k & \cdots & 2k & \cdots & n \end{array}$$

该年金的现值为：$v^{k}+v^{2k}+\cdots+v^{n}=\dfrac{1}{s_{\overline{k}|i}}a_{\overline{n}|i}$

注　该年金等价于一个付款周期等于利息换算期，数额为 $\dfrac{1}{s_{\overline{k}|i}}$ 的n期期末年金，

相应的流程图为

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & \dfrac{1}{s_{\overline{k}|i}} & \dfrac{1}{s_{\overline{k}|i}} & \cdots & \dfrac{1}{s_{\overline{k}|i}} & \cdots & \dfrac{1}{s_{\overline{k}|i}} & \cdots & \dfrac{1}{s_{\overline{k}|i}} \\
\hline
0 & 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & 2k & \cdots & n
\end{array}
$$

该年金的终值为：

$$(1+i)^{n}\frac{a_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{k}|i}}=\frac{s_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{k}|i}}$$

期初年金：

每个付款期初付款1元，流程图

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & & 1 & & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\ \hline 0 & 1 & 2\cdots k\cdots & & 2k\cdots & & n-k & \cdots & n \end{array}$$

注： 该年金等价于一个付款周期等于利息换算期，数额为 $\frac{1}{a_{\overline{k}|i}}$ 的n期期末年金，相应的流程图为

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{a_{\overline{k}|i}} & & \frac{1}{a_{\overline{k}|i}} & \cdots & \frac{1}{a_{\overline{k}|i}} & \cdots & \frac{1}{a_{\overline{k}|i}} & \cdots & \frac{1}{a_{\overline{k}|i}} \\ \hline 0 & 1 & 2 & \cdots & k & & \cdots 2k & \cdots & n \end{array}$$

从而该年金的现值为 $= \frac{1}{a_{\overline{k}|i}} a_{\overline{n}|i}$

年金的终值为 $= \frac{1}{a_{\overline{k}|i}} s_{\overline{n}|i}$

永久年金

永久期末年金: 年金的现值 = $\frac{1}{i s_{\overline{k}|i}}$

永久期初年金：年金的现值 = $\frac{1}{i a_{\overline{k}|i}}$

注 永久年金不考虑终值

例：现有年利率*i*付款r次的年金：首次付款为第七年年底且金额为1元，然后每三年付款一次且金额均为1元，分别用期末和期初年金的形式表示这个年金的现值。

解：现值计算：

$$v^7+v^{10}+\cdots+v^{7+3(r-1)}=\frac{v^7-v^{3r+7}}{1-v^3}$$

用期末年金表示为：$\dfrac{a_{\overline{3r+7}|i}-a_{\overline{7}|i}}{a_{\overline{3}|i}}$

用期初年金表示为：$\dfrac{\ddot{a}_{\overline{3r+7}|i}-\ddot{a}_{\overline{7}|i}}{\ddot{a}_{\overline{3}|i}}$

注　可以把上面的现金流看成是期末年金或期初年金，然后分别转换为递延7期的期末年金或递延7期的期初年金的形式来计算 。

例：10万元投资在每年底收回1 万元，当不足1万元时，将不足部分与最后一次的1万元一起收回。如果半年名利率为 7% ，试计算总的付款次数和最后一次的付款金额

解：设总的付款次数为n，价值方程满足：

$$10000\frac{a_{\overline{2n}|.035}}{s_{\overline{2}|.035}} \le 100000 \text{ 且 } 10000\frac{a_{\overline{2n+2}|.035}}{s_{\overline{2}|.035}} > 100000$$

即 $a_{\overline{2n}|.035} \le 20.35$ 且 $a_{\overline{2n+2}|.035} > 20.35$

由 $a_{\overline{36}|.035} = 20.29, a_{\overline{38}|.035} = 20.84$ 可知：$n = 18.$

设最后一次的付款金额为10000+R，则有

$$R(1+3.5\%)^{-36} + 10000\frac{a_{\overline{36}|.035}}{s_{\overline{2}|.035}} = 100000$$

即

$$R = \left(100000 - 10000\frac{20.29049}{2.035}\right) \times 3.45027 = 1008.97$$

2）付款周期小于利息换算期（常见情况）

假定：利息换算期是付款周期的整数倍

m— 每个利息换算期内的付款次数

n— 年金的付款总次数/m，即：付款总次数为*mn*

i—每个利息换算期内的实利率

期末年金：

在每个付款期的期末付款**1/*m***元，流程图为：

$$\frac{1}{m} \qquad \cdots\frac{1}{m}\cdots \qquad \frac{1}{m} \qquad \cdots\cdots \qquad \frac{1}{m}$$

$$0 \quad \frac{1}{m} \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 2 \quad \cdots\cdots \quad n$$

注： 在一个计息期内总共付款1 个单位金额

思考: 对这个现金流我们应该做怎样的变换?

年金的现值记为 $a_{\overline{n|}i}^{(m)}$

$$a_{\overline{n}|i}^{(m)}=\frac{1}{m}[v^{1/m}+v^{2/m}+\ldots+v^{n-1/m}+v^{n}]$$

$$=\frac{1}{m}v^{1/m}\frac{1-v^{n}}{1-v^{1/m}}=\frac{1-v^{n}}{m[(1+i)^{1/m}-1]}=\frac{1-v^{n}}{i^{(m)}}$$

注：特别的， $a_{\overline{1}|i}^{(m)}=\dfrac{d}{i^{(m)}}$

年金的终值记为 $s_{\overline{n}|i}^{(m)}$ 即 $s_{\overline{n}|i}^{(m)}=a_{\overline{n}|i}^{(m)}(1+i)^{n}=\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i^{(m)}}$

注： $s_{\overline{1}|i}^{(m)}=\dfrac{i}{i^{(m)}}$

由现金流的转换可得如下关系

1) $a^{(m)}_{\overline{n}|\,i} = \dfrac{i}{i^{(m)}}\, a_{\overline{n}|\,i}$ **2)** $S^{(m)}_{\overline{n}|\,i} = \dfrac{i}{i^{(m)}}\, S_{\overline{n}|\,i}$

期初年金:

在每个付款期的期初付款

$$\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{m} & \frac{1}{m} & & \frac{1}{m} & \cdots & \frac{1}{m} & \cdots\cdots & \frac{1}{m} & & \cdots\cdots \\
\hline
0 & \frac{1}{m} & \frac{2}{m} & & \cdots & 1 & \cdots & & n-\frac{1}{m} & n
\end{array}$$

注: 在一个计息期内共付款**1** 个单位金额

思考**:**对这个现金流我们应该做如何的变换**?**

年金的现值记为 $\ddot{a}\frac{(m)}{n|i}$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(m)}=\frac{1}{m}[1+v^{1/m}+v^{2/m}+\cdots+v^{n-1/m}]=\frac{1}{m}\frac{1-v^n}{1-v^{1/m}}=\frac{1-v^n}{m[1-(1-d)^{1/m}]}$$

$$=\frac{1-v^n}{d^{(m)}}$$

年金的终值为 $\ddot{s}_{\overline{n}|i}^{(m)}$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i}^{(m)}=\ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(m)}(1+i)^n=\frac{(1+i)^n-1}{d^{(m)}}$$

注: 特别的，$\ddot{s}_{\overline{1}|i}^{(m)}=\frac{i}{d^{(m)}}$

通过现金流转换可以得到如下关系

1） $\ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(m)}=\ddot{a}_{\overline{1}|i}^{(m)}\ddot{a}_{\overline{n}|i}=\frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_{\overline{n}|i}$

2） $\ddot{s}_{\overline{n}|i}^{(m)}=\ddot{a}_{\overline{1}|i}^{(m)}\ddot{s}_{\overline{n}|i}=\frac{d}{d^{(m)}}\ddot{s}_{\overline{n}|i}$

3) $\ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(m)}=\ddot{s}_{\overline{1}|i}^{(m)}a_{\overline{n}|i}=\frac{i}{d^{(m)}}a_{\overline{n}|i}$

4) $\ddot{s}_{\overline{n}|i}^{(m)}=\ddot{s}_{\overline{1}|i}^{(m)}s_{\overline{n}|i}=\frac{i}{d^{(m)}}s_{\overline{n}|i}$

例:证明如下关系式成立

1) $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|\,i}=[\frac{i}{i^{(m)}}+\frac{i}{m}]a_{\overline{n}|\,i}$ **2)** $\ddot{S}^{(m)}_{\overline{n}|\,i}=[\frac{i}{i^{(m)}}+\frac{i}{m}]S_{\overline{n}|\,i}$

证:由等式 $\frac{i^{(m)}}{m}-\frac{d^{(m)}}{m}=\frac{i^{(m)}}{m}\times\frac{d^{(m)}}{m}$ 可得 $\frac{1}{d^{(m)}}=\frac{1}{i^{(m)}}+\frac{1}{m}$

从而有 $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|\,i}=\frac{i}{d^{(m)}}a_{\overline{n|i}}=[\frac{i}{i^{(m)}}+\frac{i}{m}]a_{\overline{n}|\,i}$ 及

$$\ddot{S}^{(m)}_{\overline{n}|\,i}=\frac{i}{d^{(m)}}S_{\overline{n}|\,i}=[\frac{i}{i^{(m)}}+\frac{i}{m}]S_{\overline{n}|\,i}$$

注:$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|\,i}$ 相当于比 $a^{(m)}_{\overline{n}|\,i}$ 提前一次付款也就是提前$\frac{1}{m}$个利息换算期,即期初年金相当于金额$(1+i)^{1/m}$为期末年金,从而有关系式

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(m)} = (1+i)^{1/m} a_{\overline{n}|i}^{(m)}$$

类似的有

$$\ddot{S}_{\overline{n}|i}^{(m)} = (1+i)^{1/m} S_{\overline{n}|i}^{(m)}$$

永久年金：

期末 $$a_{\overline{\infty}|i}^{(m)} = \frac{1}{i^{(m)}}$$

以及期初 $$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}}$$

注： $$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}^{(m)} = a_{\overline{\infty}|i}^{(m)} + \frac{1}{m}$$

在前面的所有讨论中我们要求每次的付款额为**1/m**，即每个利息换算期内的付款总额为**1**元。

在现实问题中，这个总额可以是任意值，通常为年金的年租金（**annual rent**）或“年付款额”。

实际上利息换算期不一定是一年，可能用定期租金（**periodic rent**）表示这个值更合适，因此定期租金为*R*的期末年金的现值为 $Ra_{\overline{n}|}^{(m)}$.

例：考虑一个十年期每月初付**400** 元的年金，用年利率 *i*表示以下的量：

1）在首次付款两年前的现值

2） 在末次付款三年后的终值

解:年租金 $400\times 12=4800$, 从而

1） $4800v^2\ddot{a}_{\overline{10}|i}^{(12)}=4800[\ddot{a}_{\overline{12}|i}^{(12)}-\ddot{a}_{\overline{2}|i}^{(12)}]$

2） $4800(1+i)^3\ddot{S}_{\overline{10}|i}^{(12)}=4800[\ddot{S}_{\overline{13}|i}^{(12)}-\ddot{S}_{\overline{3}|i}^{(12)}]$

例:已知每半年付款1 元的永久年金的现值为10 元,计算年利率

解:由现值方程 $2a_{\overline{\infty}|i}^{(2)}=10$ **可得**

$$\frac{1}{i^{(2)}}=5\quad \text{即：} i^{(2)}=0.2$$

从而年利率

$$i=(1+\frac{i^{(2)}}{2})-1=(1+0.1)^2-1=0.21$$

连续年金

假设:年租金为1 个金额的广义年金的付款周期可以分小,即:付款间隔充分小,而付款频率充分快（相当于 $m\to\infty$ ）

问题：极限状态下，时间为n个利息换算期，利息力为 δ 的年金的现值和终值?

假定付款是均匀的，即付款率 **(rate of payment)** 等于**1**，从而在小时间段 Δt 上付款为$1\cdot\Delta t=\Delta t$

用 $\bar{a}_{\overline{n}|}$ 表示这种连续年金的现值，则有

$$\bar{a}_{\overline{n}|}=\int_0^n v^t dt=\int_0^n e^{-\delta t}dt=\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}=\frac{1-v^n}{\delta}$$

连续年金的现值可看作是广义年金的现值的极限,即

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \lim_{m\to\infty} a_{\overline{n}|\,i}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|\mathrm{i}}$$

注：

$$i^{(m)} = m(e^{\delta/m} - 1)$$

及

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|\,i}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{i}{\mathrm{d}^{(m)}} a_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|\mathrm{i}}$$

其中 $\delta = \ln(1+i)$

用 $\bar{s}_{\overline{n}|}$ 表示这种连续年金的终值则有

$$\bar{S}_{\overline{n}|} = \int_0^n (1+i)^t dt = \int_0^n (1+i)^{n-t} dt$$

$$= (1+i)^n \int_0^n v^t dt = (1+i)^n \bar{a}_{\overline{n}|}$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{\delta} = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta} = \frac{i}{\delta} S_{\overline{n|i}}$$

§ 2.3 变化年金

特点付款金额随时间变化

常用的变化模式递增方式或递减方式

计算现值的一般原则：*计算每次付款的现值然后求和*

一般变化年金（付款期 = 利息换算期）

1)等量变化

首付 *P* 元,然后每次变化 *Q* 元,总计***n***次,期末方式。

其中：*P>0,Q*为任意实数，相应流程图

$$\begin{array}{cccccccc} & P & & P+Q & & \cdots & & P+(n+1)Q \\ \hline 0 & 1 & \ldots & 2 & \ldots & & & n \end{array}$$

如果用*A*表示这种期末年金的现值，则有

$$A = Pv + (P+Q)v^2 + (P+2Q)v^3 + \cdots + [P+(n-1)Q]v^n$$

$$A=Pv+(P+Q)v^2+(P+2Q)v^3+\ldots+[P+(n-1)Q]v^n$$

$$=P(v+v^2+\cdots+v^n)+Q[v^2+2v^3+\cdots+(n-1)v^n]$$

$$=Pa_{\overline{n}|}+Q\{[v+2v^2+3v^3+\cdots+nv^n]-[v+v^2+v^3+\cdots+v^n]$$

$$=(P-Q)a_{\overline{n}|}+Qv\frac{da_{\overline{n}|i}}{dv}=(P-Q)a_{\overline{n}|}+Q\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-nv^n}{i}$$

注：Q 可以是负数表示年金金额随时间递减,但要求

$$P+(n-1)Q>0$$

(标准)递增年金 (increasing annuity): $P=Q=1$

	1	2	…	n
1	2		…	n

现值用 $(Ia)_{\overline{n}|}$ 表示，即 $(Ia)_{\overline{n}|}=\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-nv^n}{i}$

上式可以表示为 $\ddot{a}_{\overline{n}|}=i(Ia)_{\overline{n}|}+nv^{n}$，即每次在期初投资 1 元的现值之和等于这种投资的利息(每年递增 *i*) 现值之和及本金之和(*n*)的现值

流程图为

利息之和		i	2i	…	(n-1)i	ni
本金之和	1	2	3	…	n	n
年金金额	1	1	1	…	1	
	0	1	2	…	n-1	n

思考: 通过对现金流进行变化,如何直接计算 $(Ia)_{\overline{n}|}$

注　可以利用永久年金直接计算, 即

$$(Ia)_{\overline{n}|}=\frac{1}{i}\ddot{a}_{\overline{n}|}-\frac{1}{i}nv^{n}$$

利用标准递增年金现值公式可以对一般变化年金现值进行计算 $A=(P-Q)a_{\overline{n}|}+Q(Ia)_{\overline{n}|}$

(标准)递增年金的终值用 $(Is)_{\overline{n}|}$ 表示,即

$$(Is)_{\overline{n}|} = (Ia)_{\overline{n}|}(1+i)^n = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|} - n}{i} = \frac{[s_{\overline{n+1}|} - (n+1)]}{i}$$

例: 将标准递增期末年金理解为一组固定年金的组合

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t a_{\overline{n-t}|}$$

解: 流程图为

	0	1	2	t	n-1	n
递增年金		1	2	t	n-1	n
固定年金						
		1	1		1	1
			1		1	1
			…………			
						1

由流程示意图可以推知结论成立

递减年金 (decreasing annuity)

若$P=n, Q=-1,$ 则称此变化年金为标准递减期末年金

	n	n - 1	....	1
0	1	2	....	n

现值用 $(Da)_{\overline{n|}}$ 表示

$$(Da)_{\overline{n|}} = \frac{n - a_{\overline{n|}}}{i}$$

注 $(Ia)_{\overline{n|}} + (Da)_{\overline{n|}} = (n+1)a_{\overline{n|}}$

终值用 $(Ds)_{\overline{n|}}$ 表示

$$(Ds)_{\overline{n|}} = (1+i)^n (Da)_{\overline{n|}} = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n|}}}{i}$$

例: 可以将递减年金理解为一组固定年金的组合

$$(Da)_{\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} a_{\overline{t|}}$$

解: 由其流程图可以得到结论。

注 注意比较递增和递减两种方式

一般变化年金也可以表示为一组固定年金的和

$$A = Pa_{\overline{n|}} + Q\sum_{t=1}^{n-1} v^t a_{\overline{n-t|}}$$

流程图为

	0	1	2	t	n
变化年金		P	$P+Q$	$P+(t-1)Q$	$P+(n-1)Q$
固定年金		P	P	P	P
			Q	Q	Q
				………	
					Q

注： 以上的所有结论都可以推广到期初年金的情形, 只是所有表达式分母中的 *i* 都要换成 *d*

变化的期末永久年金 现值公式为 $\frac{P}{i}+\frac{Q}{i^2}$ (Q取正数)

变化的期初永久年金 现值公式为 $\frac{P}{d}+\frac{Q}{id}$

例: “ rainbow immediate”

流程图为

	1	2	n	n - 1	n - 2	1
0	1	2	n	n +1	n +2	2n-1

年金的现值为

$$(Ia)_{\overline{n|}}+v^n(Da)_{\overline{n-1|}}=\frac{\ddot{a}_{\overline{n|}}-nv^n}{i}+v^n\frac{(n-1)-a_{\overline{n-1|}}}{i}$$

$$=(1-v^n)\frac{a_{\overline{n-1|}}+1}{i}=a_{\overline{n|}}\ddot{a}_{\overline{n|}}$$

注 由现金流转换可以直观求解

例: “paused rainbow immediate”

流程图为

	1	2	n	n	$n-1$	1
0	1	2	n	$n+1$	$n+2$	$2n$

年金的现值为

$$(Ia)_{\overline{n}|} + v^n (Da)_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \ddot{a}_{\overline{n+1}|}$$

注　由现金流转换可以直观求解

比例变化年金

年金的金额是比例变化的：首付 1 元，随后每次增加***k***倍，总共***n***次，则年金的现值为

$$v+(1+k)v^2+\cdots+(1+k)^{n-1}v^n=\frac{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{i-k}$$

注 期末年金，且公式要求$i\neq k$。当$i=k$时，利率与年金增长比例相同，相当于每次付款的现值相同，均为v，n次付款的现值之和为 nv

注 当$k<i$时，比例递增永久年金有有限的现值

例 :给出以下期末年金的现值：首付 1 元,然后每次增加 1 元,直至 10元,然后固定不变,直至第 25次付款 。

解法一：

10年递增年金与十份递延10年的 15年标准年金之和

$$(Ia)_{\overline{10}|}+10v^{10}a_{\overline{15}|}$$

解法二:

25年递增年金扣除递延10年的 15年递增年金

$$(Ia)_{\overline{25}|}-v^{10}(Ia)_{\overline{15}|}$$

解法三

十份 25年标准年金扣除 9年递减年金

$$10a_{\overline{25}|}-(Da)_{\overline{9}|}$$

例 :20年期末比例年金: 首次 1000元,每年递增4%, 年利率7%。计算现值。

解: *k*=4%, *i*=7% ,年金现值为

$$1000\frac{1-(\frac{1.04}{1.07})^{20}}{.07-.04}=14459$$

广义变化年金

特点：　变化年金 且付款周期与利率周期不同

1. 付款期 > 利息换算期

付款期 = k ×利息换算期

总的付款次数 = n/k

注 n是付款总时间，用利息换算期度量的结果，n是k的整倍数

i = 每个利息换算期的实利率

考虑首付 1元，随后每次递增 1元的方式 。记现值为A，则有

$$A = v^k + 2v^{2k} + \cdots + \frac{n}{k} v^n$$

从而有

$$(1+i)^k A = 1 + 2v^k + \cdots + \frac{n}{k} v^{n-k}$$

两式相减可得

$$A[(1+i)^k - 1] = 1 + v^k + v^{2k} + \cdots + v^{n-k} - \frac{n}{k} v^n$$

化简后有

$$A = \frac{[\frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}} - \frac{n}{k} v^n]}{i s_{\overline{k}|}}$$

注： 当 k =1 时,上式退化为递增年金

例: 计算下面永久年金的现值：第三年底 1 元 ,第六年底 2元，第九年底3元… ,依此类推。

解：用A表示这个现值， 则有

$$A = v^3 + 2v^6 + 3v^9 \cdots$$

其中 $v = \frac{1}{1+i}$,*i*为年实利率

由

$$-v^3 A = -v^6 - 2v^9 - \cdots$$

可得

$$(1-v^3)A = v^3 + v^6 + v^9 + \cdots$$

化简后有

$$A = \frac{v^3}{[1-v^3]^2}$$

2 .付款期 < 利息换算期

利息换算期为 n ， 每个利息换算期付款m次

总的付款次数 = nm

i = 每个利息换算期的实利率

考虑以下两种年金付款方式：

➢情形 1) 付款额的变化与利息换算期同步

标准情形为:在前 m次付款中(例如:第一年内),

年金为 $\frac{1}{m}$; 第二个m周期内(第二年内)的年金金额为 $\frac{2}{m}$. 随后依此类推,最后一个利息换算期内的年金金额为 $\frac{n}{m}$.

用 $(Ia)_{\overline{n}|}^{(m)}$ 表示这种年金的现值。它等价于：在第一年底一次支付 $s_{\overline{1}|}^{(m)}$，在第二年底一次支付 $2s_{\overline{1}|}^{(m)}$，依此类推。

从而有

$$(Ia)_{\overline{n}|\,i}^{(m)} = s_{\overline{1}|\,i}^{(m)}(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{i}{i^{(m)}} \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i^{(m)}}$$

注: 一般的，$R(Ia)_{\overline{n}|\,i}^{(m)}$ 表示下面这种年金的现值：第一个周期内的付款额为 $R\frac{1}{m}$，第二个周期内的付款额为 $R\frac{2}{m}$，第n个周期内的付款额为 $R\frac{n}{m}$.

例：某三年期按月付款的年金方式为：第一年内每月底付款 1000 元，第二年每月底付款 2000 元，第三年每月底付款 3000元。求该年金的现值。

解： m=12， n =3， R = 1000*m=12000， 从而这该年金的现值为 $12000(Ia)_{\overline{3}|i}^{(12)}$

➢情形 2) 付款额的变化与付款期同步

标准情形为：首付 $\frac{1}{m^2}$, 以后每次增加 $\frac{1}{m^2}$.

第一个利息换算期内的最后一次付款额为 $\frac{1}{m}$

第二个利息换算期内的最后一次付款额为 $\frac{2}{m}$

最后一个(第n个)利息换算期内的最后一次付款额为 $\frac{n}{m}$

该年金的现值用 $(I^{(m)}a)_{\overline{n}|i}^{(m)}$ 表示 。

$$(I^{(m)}a)_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{v^{1/m} + 2v^{2/m} + \cdots + nmv^{n}}{m^2} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(m)} - nv^{n}}{i^{(m)}}$$

$R(Ia)_{\overline{n|}}^{(m)}$代表下面这种年金的现值：

第一个周期内的首付款为 $R\dfrac{1}{m^2}$，然后每次增加 $R\dfrac{1}{m^2}$.

从而第一个周期结束时的最后一次付款额为 $R\dfrac{1}{m},\cdots,$

第 n个周期结束时的最后一次付款额为$R\dfrac{n}{m}$ 。

例：某三年期按月付款方式的年金为：第一个月底为 100元，第二个月底为 200元， ... ,依此类推，每月增加 100元，第一年底的付款额为 1200元，第二年底的付款额为 2400元，第三年底的最后一次付款额为 3600元。求该年金的现值。

解：m=12， n=3， R=$100m^2$=100×144 = 14400，设年实利率为 i，则年金现值为 $14400(I^{(12)}a)_{\overline{3|}\,i}^{(12)}$

例：计算以下年金在第十年底的终值：从现在开始每半年一次，首付 2000元，然后每次减少 2%，共计 10次。季结算名利率 10%。

解：按基本原则计算年金的终值为

$$2000[(1.025)^{40}+0.98(1.025)^{38}+0.98^{2}(1.025)^{36}+\cdots$$
$$+0.98^{9}(1.025)^{22}]$$
$$=2000\frac{(1.025)^{40}+0.98^{10}(1.025)^{20}}{1-(0.98)(1.025)^{-2}}=40052$$

➢ 情形 3)付款金额任意变化的年金现值

时刻 t的付款金额为r_t, t=1,2,…,n，则这种年金的现值为

$$a=\sum_{t=1}^{n} r_t v^t$$

该年金相当于一组固定年金的和，即：

$$a=\sum_{t=1}^{n}(r_t-r_{t-1})v^{t-1}a_{\overline{n-t+1}|}$$

流程图为（假设 $r_0=0$ ）

	0	1	2	…	t	…	n
变化年金		r_1	r_2	$\cdots$	r_t	$\cdots$	r_n
固定年金							
k= 1		r_1-r_0	r_1-r_0	$\cdots$	r_1-r_0	$\cdots$	r_1-r_0
k= 2			r_2-r_1	$\cdots$	r_2-r_1	$\cdots$	r_2-r_1
				$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
k=n							r_n-r_{n-1}

连续变化年金

用函数 $f(t)$表示时刻t的年金(率)函数,则用实利率 i 表示的n年期连续年金现值为

$$\int_0^n f(t)v^t dt$$

- 若f(t)=1，表示均匀支付年金
- 若f(t)=t，表示单调递增支付年金，该种连续年金的现值用 $(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}$ 表示，从而有

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} = \int_0^n tv^t dt = \frac{\bar{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{\delta}$$

特别的有: $\lim\limits_{m\to\infty}(I^{(m)}a)_{\overline{n}|}^{(m)} = (\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}$

思考：$\lim\limits_{m\to\infty}(Ia)_{\overline{n|}}^{(m)}=?$

一般地，用一般利息力函数$\delta(s)$ *表示的连续变化年金的现值公式为*

$$\int_0^n f(t)e^{-\int_0^t \delta(s)ds}dt$$

例：n年连续年金，利息力函数为常数δ,年金(率)函数$f(t)=t^2$.求该年金的现值。

解：经计算，得到以下现值结果

$$\frac{2}{\delta^3}-e^{-n\delta}\left(\frac{n^2}{\delta}+\frac{2n}{\delta^2}+\frac{2}{\delta^3}\right)$$

2.4 实例分析

➢ 固定养老金计划

1.一般情形

- 责任:未退休时,每月初存入一定金额,具体方式为:

  25 岁 — 29 岁 月付 X_1　30 岁 — 39 岁 月付 X_2

  40 岁 — 49 岁 月付 X_3　50 岁 — 59 岁 月付 X_4

- 权益：从退休时（60 岁）开始，每月初领取 *P* 元的退休金，一直进行二十年。

问题:在给定年利率 *i* 的条件下,分析退休基金的存款金额 (X_1, X_2, X_3, X_4) 和最终的月退休金(P)的关系。

2 .考虑25 岁参加养老计划,基本的价值方程为:

$$12P\ddot{a}_{\overline{20}|}^{(12)} = 12X_1\ddot{s}_{\overline{5}|}^{(12)}(1+i)^{30} + 12X_2\ddot{s}_{\overline{10}|}^{(12)}(1+i)^{20} + 12X_3\ddot{s}_{\overline{10}|}^{(12)}(1+i)^{10} + 12X_4\ddot{s}_{\overline{10}|}^{(12)}$$

于是

$$P = \frac{X_1 s_{\overline{35}|} + (X_2 - X_1)s_{\overline{30}|} + (X_3 - X_2)s_{\overline{20}|} + (X_4 - X_3)s_{\overline{10}|}}{a_{\overline{20}|}}$$

这是因为有:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(m)} = a_{\overline{n}|i}^{(m)}(1+i)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{i}{i^{(m)}} + \frac{i}{m}\right)a_{\overline{n}|i}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i}^{(m)} = \left(\frac{i}{i^{(m)}} + \frac{i}{m}\right)s_{\overline{n}|i}$$

例：年利率 $i = 10\%$ 。因此有：

$a_{\overline{20}|.10} = 8.5136$ ； $s_{\overline{35}|.10} = 271.0244$；

$s_{\overline{30}|.10} = 164.4940$； $s_{\overline{20}|.10} = 57.2750$；

$s_{\overline{10}|.10} = 15.9374$

具体的存款方式为：

在25 岁到29 岁时，每月存款200元；

在30 岁到39 岁时，每月存款300元；

在40岁到 49 岁时，每月存款500 元；

在50 岁到59 岁时，每月存款1000 元。

分别对不同年龄的计划参加者计算月退休金

解：1)恰好在25 岁开始加入养老金计划

$$P = 100 \times \frac{2s_{\overline{35|}.1} + s_{\overline{30|}.1} + 2s_{\overline{20|}.1} + 5s_{\overline{10|}.1}}{a_{\overline{20|}.1}} = 10,580.48$$

60 岁以后的月退休金为P = 10,580.48 元，即：每月领取约一万元的退休金，直至80 岁。

注：(200, 300, 500, 1000)

2）从30 岁开始加入养老金计划

$$P = 100\frac{3s_{\overline{30|}.1} + 2s_{\overline{20|}.1} + 5s_{\overline{10|}.1}}{a_{\overline{20|}.1}} = 8077.89$$

60 岁以后的月退休金为P = 8077.89 元,即：每月领取约八千元的退休金。

注：(0, 300, 500, 1000)

3) 从40 岁开始加入养老金计划

$$P = 500\frac{s_{\overline{20}|.1} + s_{\overline{10}|.1}}{a_{\overline{20}|.1}} = 4299.73$$

即:60 岁以后的月退休金为：P = 4299.73 元，即：每月领取约四千元的退休金。

注： (0, 0, 500, 1000)

➢购房分期付款

引入如下记号：

P —— 总的房款金额（房价）

k —— 一次性付款比例（首付比例）

i —— 年利率（实）

n —— 分期付款年数

R —— 每月付款金额（月底）

则有 $(1-k)P = 12Ra_{\overline{n}|}^{(12)}$

从而每月付款

$$R = \frac{(1-k)P}{12a_{\overline{n}|}^{(12)}} = \frac{(1-k)i^{(12)}P}{12ia_{\overline{n}|}}$$

例：已知P=500000，k= 30%，*i*= 8%，$i^{(12)}$ = .077208 求相应贷款期等于五年、八年、十年的每月还款R。

解：

1） 分五年付清。$a_{\overline{5}|.08}=3.9927$，得到：R= 7050.05。每月付款约七千元。

2） 分八年付清。$a_{\overline{8}|.08}=5.7466$，得到：R= 4898.33。每月付款近五千元。

3） 分十年付清。$a_{\overline{10}|.08}=6.7101$，得到R= 4194.98。每月付款约四千元。

◆ 年金利率的近似计算

已知年金的现（终）值，反解年实利率是年金计算中常见的基本问题，通常可以通过迭代算法求数值解，也可以利用**Excel** 直接求数值解。

例：已知当前投入为**12** 万元，随后的**5** 年中每年底收益**2** 万**2** 千元，试计算年实利率。

解：设**i**为年实利率，则有如下等式

$$22000a_{\overline{5}|i}=120000$$

化简为 $a_{\overline{5}|i}\cong 4.09091$

下面反解**i**。

❖ 方法一：（迭代法）

对一般的问题，设a 为现值，n为期限。则有i 为下面方程的解：$a=\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

首先利用简单的泰勒展开到平方项，取初值：

$$i=\frac{2(n-a)}{a(n+1)}$$

然后以下面的方法叠代计算：

$$i_{k+1}=i_k+\frac{a_{\overline{n}|i_k}-a}{a_{\overline{n}|i_k}-n(1+i_k)^{-(n+1)}}i_k$$

停止的准则可以是类似 $|i_{k+1}-i_k|\leq 0.001\times i_k$ 形式的判别。

用这个方法计算本例，取 i_1 = 0.05，则三次迭代后即可满足条件 i_4 = 0.0708475

- 方法二：（**Excel**）

用规划求解直接求得 **i = 0.0708475**

注：精度可以调整

例：计算下面年金的年实利率 **i**：每个季度末投入 **100** 元，在第五年底的终值为**2500** 元。

解：$100 s_{\overline{20}|j} = 2500$ 或 $s_{\overline{20}|j} = 25$

利用**Excel**直接求解，得到：***j= .022854***

从而所求年利率***i:*** $i = (1+j)^4 - 1 = 0.0946$

注：注意添加约束

例：某人继承了一笔遗产：从现在开始每年得到10000 元。该继承人以年利率10%将每年的遗产收入存入银行。第五年底，在领取第六次年金之前，他将剩余的遗产领取权益转卖给他人，然后，将所得收入与前五年的储蓄收入合并，全部用于年收益率为12%的某种投资，若每年底的投资回报是相同的，且总计三十年，试计算每年的回报金额。

注：流程图，永久年金，转手收益率

解: 设每年的回报金额为X，则有

$$10000\ddot{s}_{\overline{5}|.1} + 10000\ddot{a}_{\overline{\infty}|.1} = Xa_{\overline{30}|.12}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{d} = \frac{1+i}{i}$$

$$X = 10000\frac{\ddot{s}_{\overline{5}|.1} + \frac{1.1}{0.1}}{a_{\overline{30}|.12}} = 10000\frac{1.1\times 6.1051+11}{8.055} = 21992.76$$

例：考虑以下两种等价的期末年金方式：

A — 首付6000 元，然后每年减少100 元，直至某年（k）底,随后保持这种付款水平直至永远;

B — 每年底固定付款5000 元。

已知年利率为6%，试计算k（近似整数）。

注：现金流的不同形式转化

解:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} - i a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}$$

- 方法一:价值方式为

$$5000 a_{\overline{\infty}|.06} = 6000 a_{\overline{k}|.06} - 100 (Ia)_{\overline{k}|.06} + [6000 - (k-1)100] v^k a_{\overline{\infty}|.06}$$

可得

$$a_{\overline{k}|.06} = 11/1.06 = 10.37735849$$

反查年金表可知 $k \approx 17$

例: 某人在退休时一次性得到退休金四十万元，他将其中的一部分（X） 购买了年回报率为7 %的永久年金；剩余部分购买了年回报率为10 %的十年期债券。已知他前十年的年收入是后十年的两倍，计算永久年金的买价。

注：这里假设国债投资收入平均分配在前十年的每一年里面，且国债投资收益不再进行投资

解: 设投入永久年金的金额为X，每年回收额为R，则有

$$X = Ra_{\overline{\infty}|.07} = \frac{R}{0.07}$$

从而 R= 0.07X

投入国债的金额为400000 - X，年收入为R',则有

$$400000 - X = R' a_{\overline{10}|.1}$$

从而

$$R' = \frac{400000 - X}{a_{\overline{10}|.1}}$$

由题设有: $R + R' = 2R$

即: $R = R'$

从而可得方程

$$0.07X = \frac{400000 - X}{a_{\overline{10}|.1}}$$

解出

$$X = \frac{400000}{1 + 0.07a_{\overline{10}|.1}} = 279696.42$$

即:退休金中的近二十八万元用于购买永久年金.

例:某汽车商计划采用如下的零售策略:

1) 若一次付清车款,价格为1 万元,或

2) 以年利率8%提供4 年分期付款(按月付款)

已知当前市场上商业消费贷款的月换算名义年利率为**12% ,**试分析第**2** 种零售策略的当前成本。

解:该零售策略的月供款为:

$$\frac{10000}{12a_{\overline{4}|8\%}^{(12)}}=\frac{10000}{12(1.036157)(3.3121)}=242.82$$

按照当前市场上商业消费贷款的利率水平计算上述月供款的当前价值为:

$$242.82a_{\overline{48}|1\%}=242.82\times37.9740=9220.96$$

从而该零售策略的当前成本为:

10,000-9220.96=779.04元

相当于零售商优惠了顾客**7.8%**

附：有关年金终值的分析

例：解释 $s_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} i^{k-1}$ 的实际意义

关键点：利滚利

关键公式：$\sum_{m=k}^{n-1} \binom{m}{k} = \binom{n}{k+1}$

附：单利情形的年金计算

形式上仍然可以考虑年金的价值计算，即：年金在某个时刻的价值（现值或终值）为年金现金流累计或贴现到该时刻的价值之和。

例：金额为**100** 元的**20** 年期初年金，以单利率***i*** *累计*到**20** 年底的价值为**2500** 元,如果以相同的利率按复利累计,价值为多少?

解:单利模式下有

$$AV = 100[20 + (1 + 2 + \cdots + 20)i] = 2000 + 21000i = 4100$$

$$\Rightarrow i = 10\%$$

复利模式下有

$$AV = 100\ddot{s}_{\overline{20}|10\%} = 100 \times (1.10) \times 57.2750 = 6300.25$$

注:显然两种计算方法的结果相差很大

例:单利模式下计算年金,所得结果对所用计算方式非常灵敏，已知利率水平i ,单利方式,连续年金

- 方法一:对于所有的发生金额,在同一时刻使用相同的利息力,即 $\delta_t = \dfrac{i}{1+it}, t \geq 0$

从而年金的现值为

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n \exp\left(-\int_0^t \delta_s ds\right)dt = \int_0^n \frac{1}{1+it} dt = \frac{\log(1+in)}{i}$$

年金的终值为

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \int_0^n \exp\left(\int_t^n \delta_s ds\right)dt = \int_0^n \frac{1+in}{1+it} dt = (1+in)\frac{\log(1+in)}{i}$$

注: 现值与终值之间有关系式 $\bar{s}_{\overline{n}|} = (1+in)\bar{a}_{\overline{n}|}$,与复利模式下的结果类似。

方法二:对于不同的发生金额,在同一时刻依据投入时间的不同使用不同的利息力,即

$$\delta_t = \frac{i}{1+i(t-t_0)}, t \geq t_0 \geq 0$$

t_0 为金额发生的时刻

等价的，对任意的时间区间$[t_0, t], t_0 < t$, 以单利率累计，则时刻t_0 的1 元 $\Rightarrow$时刻t 的$1+i(t-t_0)$元

显然，年金的现值 $a_{\overline{n}|i}$ 不变，而年金的终值变为

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \int_0^n [1+i(n-t)]dt = n(1+\frac{in}{2})$$

现值与终值之间不再有关系式 $\bar{s}_{\overline{n}|} = (1+in)\bar{a}_{\overline{n}|}$