谐和平面波场（1）

平面波

平面波（plane wave）：根据波阵面的形状定义。

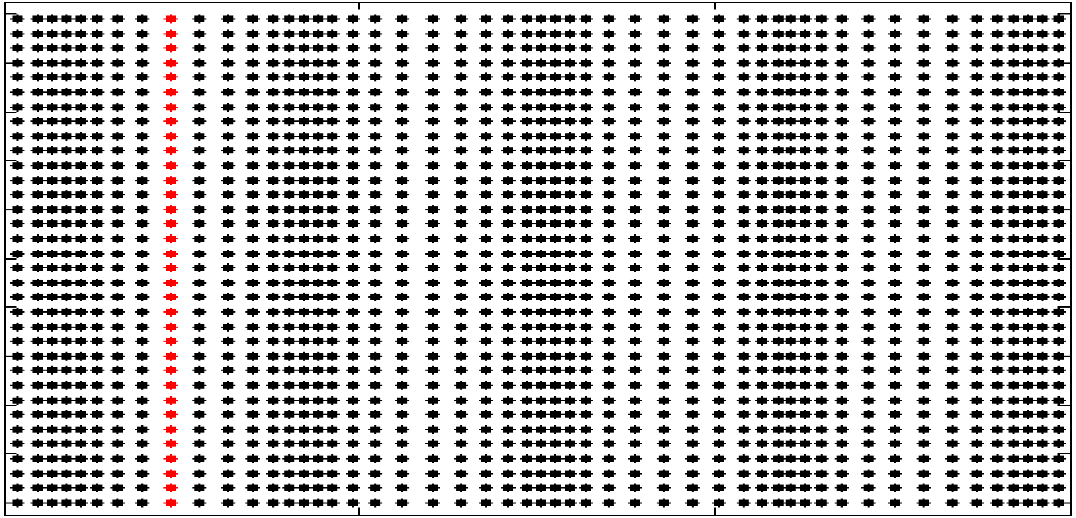
(1) 波阵面：声场中具有相同振动状态各点构成的空间曲面。

(2) 平面波是指波阵面为平面的声波。

(3) 平面波是一种函数形式最简单的声波，是一种理想的波场。

设想在无限均匀介质里有一个无限大平面刚性物体沿法线方向来回振动，这时所产生的声场就是平面波场。

平面波



谐和平面波

首先考虑谐和振动的平面波，有两个原因：

① 声学中相当多的声源是随时间作谐和振动的；

② 随时间谐和变化的声场是分析随时间复杂变化的声场的基础。因为根据傅立叶分析，任意时间变化的函数原则上都可以分解为许多不同频率的谐和函数的叠加（或积分）。

谐和平面波

波动方程： $\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$

声波波动方程只是在应用了介质的基本物理特性以后导得的，并没有考虑具体声源的振动状况及边界上的状况，因此它反映的是理想介质中声波这个物理现象的共同规律；

至于具体的声传播特性还必须结合具体声源及具体边界条件来确定。

谐和平面波

波动方程的应用

求出波动方程的一般形式解，

然后代以边界条件，

求出确定的解。

谐和平面波

三维波动方程：

$$\nabla^2 p(x,y,z,t) - \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 p(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 p(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0$$

谐和平面波

设波沿 ox 轴方向传播，平面波的波动方程简化为一维波动方程，即：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

求在稳定的简谐声源作用下产生的稳态声场。

设方程解的复数形式为：

$$\tilde{p}(x,t) = \tilde{p}(x) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

上式代入波动方程。

谐和平面波

有 $$\frac{\partial^2 \tilde{p}(x)}{\partial x^2} + k^2 \tilde{p}(x) = 0$$

$$k = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$$ **称为波数。**

常微分方程的一般解可以取正弦、余弦的组合，

取复数形式，有： $$p(x) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx} + B\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx}$$

A, B **为两个任意常数，由边界条件决定。**

谐和平面波

考虑到时间变量，有：$\tilde{p}(x,t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kx)}+B\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+kx)}$

一维波动方程的形式解

- 第一项代表了沿 x **正方向**行进的波
- 第二项代表了沿 x **负方向**行进的波

利用**边界条件**确定波的具体形式。

谐和平面行波

边界条件1：无限远边界条件，声波传到无限远处消失。

在无限空间，不存在反射体，这时不出现反射波。表示单向传播的波，称为行波（前进波）。

$$\tilde{p}(x,t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kx)} \tag{1}$$

谐和平面行波

边界条件2：振源表面的声压已知

设振源表面的声压： $p(x,t)\big|_{x=0} = p_0 \cos(\omega t)$

写为复数形式： $\tilde{p}(x,t)\big|_{x=0} = p_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$

代入 $\boxed{\tilde{p}(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)}}$ **(1)** **式** $\Rightarrow$ $A = p_0$

谐和平面行波

于是，声场中的复数声压为：

$$\tilde{p}(x,t) = p_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)}$$

声场中的声压分布为：

$$p(x,t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{p}(x,t)\right] = p_0 \cos(\omega t - kx)$$

总结

谐和平面波场

1、波动方程求解：波动方程+边界条件；

2、沿 x 正轴方向的谐和平面行波场的解：

$$\boxed{p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)}$$

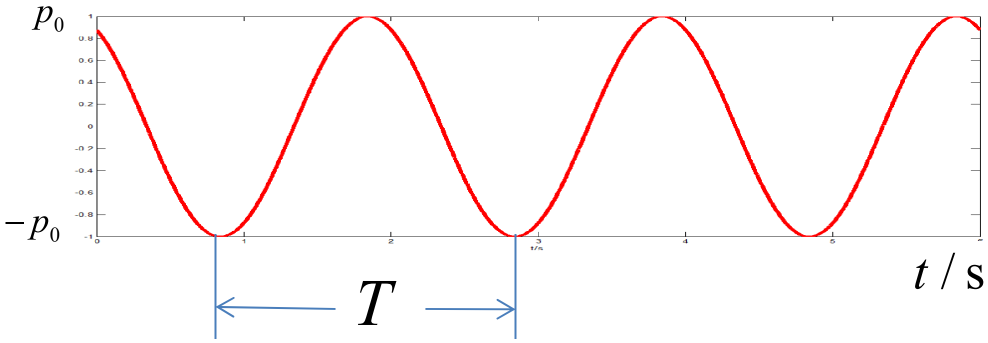
谐和平面波场（2）

谐和平面波声压场

平面行波场中的声压分布为：

$$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$$

谐和平面波声压场



$$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$$

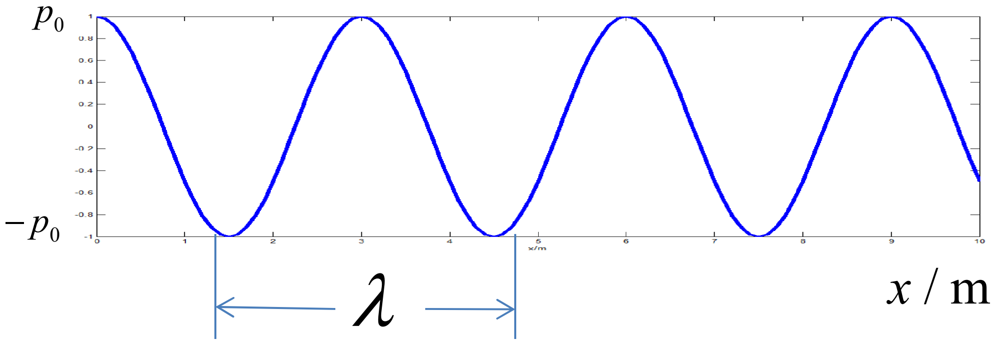
空间某点声压随时间变化

周　期： T **单位** s

频　率： f **单位时间内周期性振动的次数，单位**Hz，$f = \dfrac{1}{T}$

角频率： ω **单位** rad/s　　$\omega = 2\pi f$　　$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

谐和平面波声压场



$$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$$

t时刻声压空间分布

波长： λ **是波在一个周期传播的距离，** $\lambda = c_0 T = \dfrac{c_0}{f}$ **，单位m**

波长与时间上的周期T对应（是波的空间周期）。

波数： k **是波传播单位距离落后的相位角，** $k = \dfrac{\omega}{c_0} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ **，单位rad/m**

波数与时间上的角频率 ω **对应。**

谐和平面波声压场

$$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$$

平面波传播时，在 $x = x_1$ 平面上的点的振动，比 $x=0$ 的振动落后相位角为：$\phi_1 = kx_1$

结论

谐和律平面波传播时，振幅和波形保持不变。

谐和平面波声压场

在某一瞬时 $t=t_0$ 时位于位置 $x=x_0$ 处的波经过 Δt 时间后，位于何处呢？

假设经过 Δt 时间以后，波传播到 $x_0+\Delta x$ 处。

- 如果 $\Delta x=0$，波仍在原处
- 如果 $\Delta x>0$，波沿 x 正方向移动
- 如果 $\Delta x<0$，波沿 x 负方向移动

谐和平面波声压场

在声波的传播方向上，t_0 时刻、 x_0 处的声波，

在 $t_0+\Delta t$ 时刻，传播到 $x_0+\Delta x$，波形应该保持不变。

$$\tilde{p}\left(x_0,t_0\right)=p_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t_0-kx_0)}$$

$$\tilde{p}\left(x_0+\Delta x,t_0+\Delta t\right)=p_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left[\omega\left(t_0+\Delta t\right)-k\left(x_0+\Delta x\right)\right]}$$

波形不变 ➡ $$\boxed{\tilde{p}(x_0,t_0)=\tilde{p}(x_0+\Delta x,t_0+\Delta t)}$$

谐和平面波声压场

$$p_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t_0 - k x_0)} = p_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left[\omega(t_0+\Delta t) - k(x_0+\Delta x)\right]}$$

$$p_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t_0 - k x_0)} = p_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t_0 - k x_0)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\Delta t - k\Delta x)}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\Delta t - k\Delta x)} = 1$$

$$\omega\Delta t - k\Delta x = 0$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{\omega}{k}\Delta t = c_0\Delta t}$$

谐和平面波声压场

$$\left.\begin{aligned}\Delta t &> 0\\ c_0 &> 0\end{aligned}\right\} \longrightarrow \Delta x > 0$$

所以 $\tilde{p}(x,t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)}$

表征了沿 x 正方向行进的波。

同理 $\tilde{p}(x,t) = B\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kx)}$

表征了沿 x 负方向行进的波。

声波传播速度

$c_0=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 代表单位时间内平面行波波阵面传播的距离，也就是平面行波的声传播速度，简称**声速**。

推导状态方程时，引进介质的（等熵）波速的概念。

定义为：

$$c_0 \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho_0, s_0}}$$

反映了媒质受声扰动时的压缩性特性。

声波传播速度

（1）介质的压缩特性影响声波传播速度的快慢。

- ◆介质的可压缩性较大，声扰动传播速度较慢；
- ◆介质的可压缩性较小，声扰动传播速度较快；

声波传播速度

（2）声波传播速度和波速的差别

- 波速反映了介质的可压缩性，和声波的传播速度有关，但它是介质固有的性质，和具体的波没有关系。对于某种参数一定的介质，其波速是一个定值。
- 声波传播速度则是描述声波在介质中的传播速度，和具体的波有关。同一种介质中传播的不同类型的波的传播速度不同。
- 理想流体的平面行波的传播速度和波速在数值上相等。

总结

谐和平面行波场

1、声压在传播过程中振幅和波形不变

2、介质的压缩性影响声波的传播速度

谐和平面波场（3）

等相位面

等相位面：

谐和波场中，振动相位相同的空间点构成的曲面，称作谐和波场的等相位面。

等相位面的概念仅用在谐和波场，波阵面用于任何声波场。波阵面上的每点振动状态完全相同。而等相位面要求相位相同，其振幅可以不同。

等相位面和波阵面是两个不同的概念。

相速度：

谐和波场的某一声学量的等相位面传播速度，称作该声学量的相速度c_p。

等相位面

谐和平面行波场声压函数：$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$

相位函数为：$\phi(x,t) = \omega t - kx$

任意时刻t_0，具有相同相位ϕ_0的质点构成一个平面，即谐和平面行波场的等相位面是一个平面。

等相位面

谐和平面行波场声压函数： $p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$

相位函数为： $\phi(x,t) = \omega t - kx$

任意时刻t_0，具有相同相位ϕ_0的质点构成一个平面，即谐和波场的等相位面是一个平面。

$$\omega t_0 - kx = \phi_0 \Rightarrow x = \frac{\omega t_0 - \phi_0}{k} = \text{const}$$

说明谐和平面行波传播过程中，等相位面是平面。

相速度

声压等相位面为： $\phi(x,t)=\text{常数};\Rightarrow \omega t-kx=a(\text{常数})$

谐和平面行波场的声压相速度为：

$$c_p=\frac{dx}{dt}\Big|_{\phi(x,t)=a}=\frac{dx}{dt}\Big|_{\omega t-kx=a}\ \frac{d\left(\frac{\omega}{k}t-a\right)}{dt}\Big|_{\omega t-kx=a}=\frac{\omega}{k}=c_0$$

结论

谐和平面行波的声压相速度等于声波传播的速度。

质点振速

求质点振速

谐和平面行波场复声压为： $\tilde{p}(x,t)=p_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kx)}$

据尤拉公式， $\rho_0\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t}=-\nabla p$ **复质点振速为：**

$$\tilde{\vec{u}}(x,t)=-\frac{1}{\rho_0}\int\nabla\tilde{p}dt\vec{i}=-\frac{1}{\rho_0}\int\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x}dt\vec{i}=\frac{p_0}{\rho_0c_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kx)}\vec{i}=\frac{\tilde{p}(x,t)}{\rho_0c_0}\vec{i}$$

振速为：

$$\vec{u}(x,t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{\vec{u}}(x,t)\right]=\frac{p_0}{\rho_0c_0}\cos(\omega t-kx)\vec{i}=\frac{p(x,t)}{\rho_0c_0}\vec{i}$$

$$-\frac{1}{\rho_0}\int\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}\,dt\,\vec{i}$$

$$= -\frac{1}{\rho_0}\int\frac{\partial[p_0 e^{j(\omega t-kx)}]}{\partial x}\,dt\,\vec{i}$$

$e^{a+b}=e^{a}\cdot e^{b}$

$$= -\frac{1}{\rho_0}\int p_0\,\frac{\partial(e^{j\omega t}\cdot e^{-jkx})}{\partial x}\,dt\,\vec{i}$$

$$= -\frac{1}{\rho_0}\int p_0 e^{j\omega t}\,\frac{\partial e^{-jkx}}{\partial x}\,dt\,\vec{i}$$

$\frac{de^{kx}}{dx}=ke^{kx}$

$$= -\frac{1}{\rho_0}\int p_0 e^{j\omega t}(-jk)e^{-jkx}\,dt\,\vec{i}$$

$$= -\frac{1}{\rho_0}p_0(-jk)e^{-jkx}\int e^{j\omega t}\,dt\,\vec{i}$$

$\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{x}+C$

$$= -\frac{p_0}{\rho_0}(-jk)e^{-jkx}\,\frac{1}{j\omega}e^{j\omega t}\,\vec{i}$$

$$= \frac{p_0}{\rho_0}\cdot\frac{k}{\omega}e^{j(\omega t-kx)}\,\vec{i} = \frac{p_0}{\rho_0}\cdot\frac{1}{c_0}e^{j(\omega t-kx)}\,\vec{i}$$

$$= \frac{p_0}{\rho_0 c_0}e^{j(\omega t-kx)}\,\vec{i} = \frac{\tilde{p}(x,t)}{\rho_0 c_0}\,\vec{i}$$

平面行波场声压和质点振速

$$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx) \qquad \vec{u}(x,t) = \frac{p_0}{\rho_0 c_0}\cos(\omega t - kx)\vec{i}$$

定义： $\rho_0 c_0$**为介质的特性阻抗，介质的质量密度与介质波速之积。介质的特性阻抗是介质的固有参数，反映了介质的声学性质。在[MKS]制中基本单位（kg/s·m²）（瑞利）**

质点振速等相位面为：$\phi(x,t) = \text{常数}; \Rightarrow \omega t - kx = b(\text{常数})$

谐和平面行波场的质点振速相速度为：

$$c_p = \frac{dx}{dt}\Big|_{\phi(x,t)=b} = \frac{dx}{dt}\Big|_{\omega t - kx = b} \frac{d\left(\frac{\omega}{k}t - b\right)}{dt}\Big|_{\omega t - kx = b} = \frac{\omega}{k} = c_0$$

平面行波场声压和质点振速

$$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$\vec{u}(x,t) = \frac{p_0}{\rho_0 c_0} \cos(\omega t - kx)\vec{i}$$

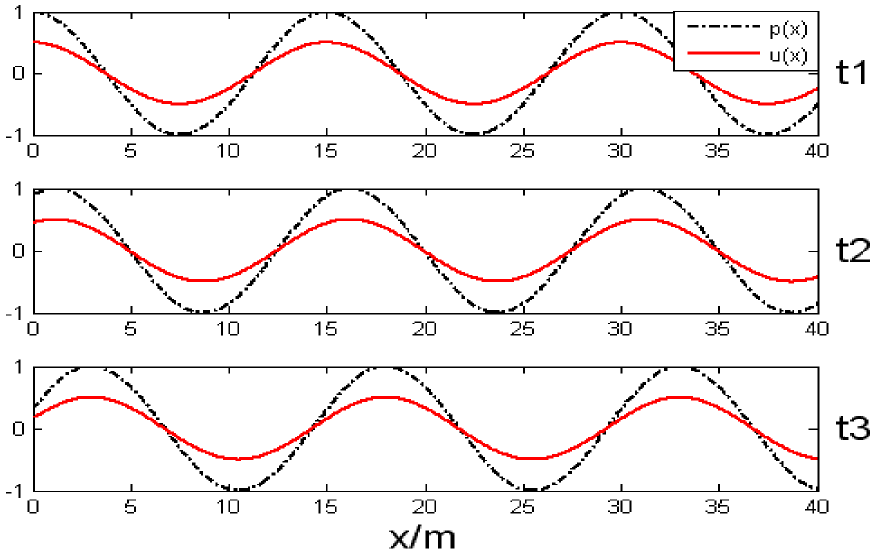
结论

- ◆谐和平面行波的**声压**、**质点振速**的波形相同，声压和质点振速的比值等于介质的特性阻抗。
- ◆谐和平面行波的**声压相速度**和**质点振速相速度**相等，都等于声波传播的速度。

平面行波场声压和质点振速

$$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx) \qquad \vec{u}(x,t) = \frac{p_0}{\rho_0 c_0} \cos(\omega t - kx)\vec{i}$$

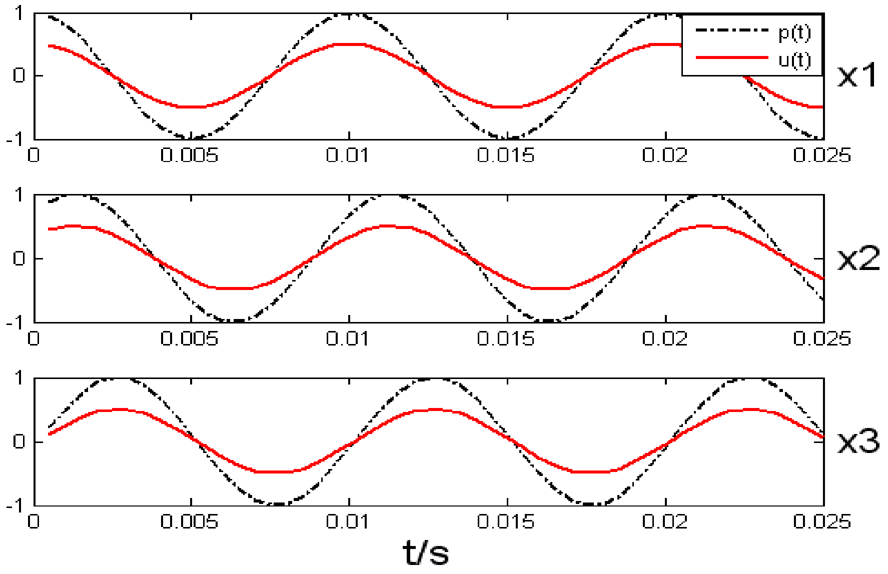
不同时刻，声压和振速的空间分布（$t1<t2<t3$）



平面行波场声压和质点振速

$$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx) \qquad \vec{u}(x,t) = \frac{p_0}{\rho_0 c_0} \cos(\omega t - kx)\vec{i}$$

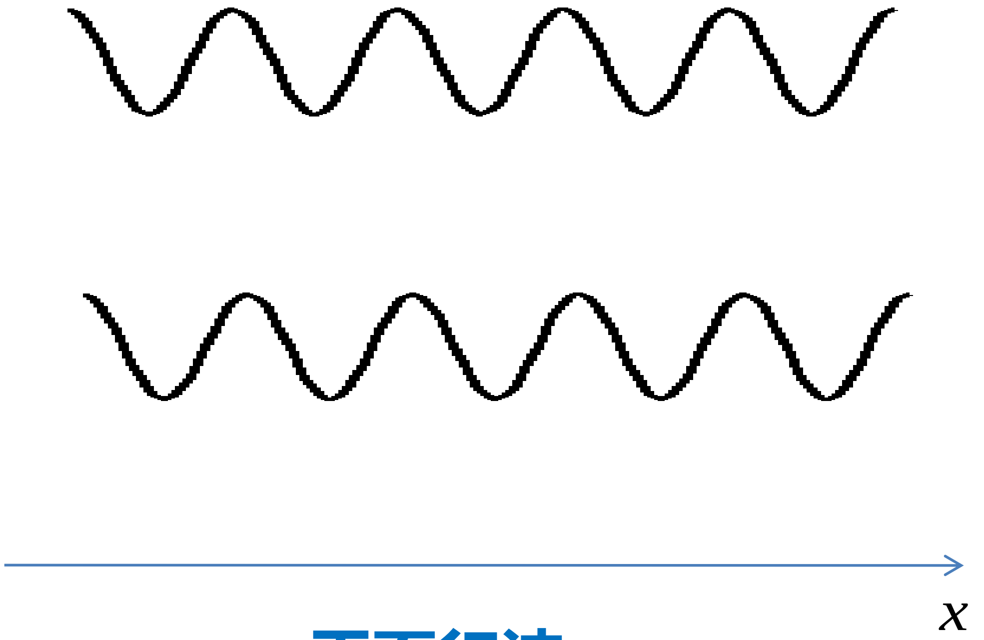
不同空间位置，声压和振速的时间信号波形（x1<x2<x3）



平面行波传播

$$p(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)}$$

$$p(x,t) = B\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kx)}$$



平面行波

总结

谐和平面行波场

1、声压和质点振速波形相同，
二者比值等于介质特性阻抗；

2、声压和质点振速相速度相同，
等于波传播速度。

谐和平面波场（4）

波阻抗

波阻抗：

谐和波场中某场点处的复声压与复振速之比，称作该点的波阻抗。记， $\tilde{Z}_a(\omega,\vec{r})$, (**或** $Z_a(\omega,\vec{r})$)。

$$Z_a(\omega,\vec{r}) \equiv \frac{\tilde{p}(\vec{r},t)}{\tilde{u}(\vec{r},t)}$$

$|Z_a|$ **的量纲：[压强]/[振速] = [$M^1T^{-1}L^{-2}$]**

在[MKS]制中基本单位（kg/s·m²）（瑞利）

波阻抗

平面行波场的波阻抗：

$$Z_a(\omega,\vec{r})=\frac{\tilde{p}(\vec{r},t)}{\tilde{u}(\vec{r},t)}=\frac{p_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kx)}}{\dfrac{1}{\rho_0 c_0}p_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kx)}}=\rho_0 c_0$$

- **平面行波场中，各位置的波阻抗数值上相等，且为实数；**
- **这反映了在平面行波中各位置上都无能量的贮存；**
- **在前一个位置上的能量可以完全地传播到后一个位置上。**

波阻抗

介质的特性阻抗$\rho_0 c_0$：

介质的密度和波速的乘积，是介质固有的一个常数。

水的特性阻抗为：$\rho_0 c_0 = 1.5 \times 10^6$ **瑞利**

空气的特性阻抗为：$\rho_0 c_0 = 420$ **瑞利**

结论

平面行波波阻抗数值上恰好等于介质的特性阻抗。

波阻抗和介质的特性阻抗

注意

波阻抗和介质的特性阻抗是两个不同的概念。

总结

谐和平面行波场

1、波阻抗：

沿坐标轴正向传播的平面行波的波阻抗数值上等于介质的特性阻抗

一般平面波

平面波

平面波（plane wave）

平面声波是指**波阵面**为**平面**的声波。

声场中具有相同振动状态各点构成的空间曲面即为波阵面。

谐和平面波

设谐和平面波沿ox轴方向传播，波阵面为*y-o-z*面，亦声场函数与*y*、*z*空间变量无关，波动简化为一维波动方程：

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

谐和平面波

时间是简谐的 $e^{j\omega t}$ **，其解：**

$$\tilde{p}(x,t) = A\,e^{j(\omega t - kx)} + B\,e^{j(\omega t + kx)}$$

- **第一项代表了沿 x 正方向行进的波**
- **第二项代表了沿 x 负方向行进的波**

一般平面波

以上推出的结果是假设声压时间变化是谐和函数，它是振动形式最简单的声波。

谐和声波解只是平面波解的**一种特殊形式**，平面波并不局限于谐和波解。

一般平面波

仍然设波沿ox轴传播，波阵面为*y-o-z*面，波动方程简化一维波动方程：

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

此为达朗贝尔方程，其解为：

$$p(x,t) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$$

其中， $f_1(.)$ **和** $f_2(.)$ **为二次可微函数。**

一般平面波

事实上，满足以上形式的方程都是波动方程的解，都表示在声场中传播的平面波。

- 第一项表示沿x正方向传播的波
- 第二项表示沿x负方向传播的波

一般平面波

分析其中的一个解 $f_1(x-c_0t)$ **——正向传播的平面行波场声压：**

$$p(x,t)=f_1(x-c_0t)$$

时空综量 $\xi(x,t)=x-c_0t$ **描述了波场的振动状态。**

t **时刻具有相同振动状态的空间函数为：**

$$\xi(x,t)=a$$

常数 a **不同表示不同波阵面。**

一般平面波

波阵面移动的速度，也即波的传播速度：

$$\frac{dx}{dt}\bigg|_{\xi(x,t)=a} = \frac{dx}{dt}\bigg|_{x-c_0 t=a} = \frac{d(c_0 t + a)}{dt} = c_0$$

- **平面行波(简称平面波)的波阵面传播速度是常数c_0；**
- **声压函数在传播过程中时间波形（信号）不变；**
- **波形（信号）的传播速度是常数c_0。**

一般平面波

求质点振速

据尤拉方程 $\rho_0 \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p$ **得：**

$$\vec{u}(x,t) = -\frac{1}{\rho_0}\int \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} dt \cdot \vec{i} = -\frac{1}{\rho_0}\int \frac{\partial f_1(x-c_0 t)}{\partial x} dt \cdot \vec{i}$$

$$= \frac{1}{\rho_0 c_0} \cdot f_1(x-c_0 t)\vec{i} = \frac{1}{\rho_0 c_0} p(x,t)\vec{i}$$

一般平面波

平面波行波场的质点振速函数等于声压函数除以介质的特性阻抗 $\rho_0 c_0$。

$$\vec{u}(x,t)=\frac{1}{\rho_0 c_0}p(x,t)\vec{i}$$

声压和质点振速的波形相同。

总结

平面波的特点

1、平面波在传播过程中，波形和波幅保持不变；

2、平面波的声压、振速的波形相同，声压和振速的比值等于介质的特性阻抗。